Н. В. БУТЕНИН, Н. А. ФУФАЕВ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ

Н. В. БУТЕНИН, Н. А. ФУФАЕВ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1991

ББК 22.21
Б93
УДК 531(075.8)

Бутенин Н. В., Фуфаев Н. А. **Введение в аналитическую механику.**— 2-е изд., пер. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.— 256 с.— ISBN 5-02-014221-2.

Дано систематическое и доступное изложение основ аналитической механики. Включены разделы: уравнения Лагранжа, уравнения движения в квазикоординатах, уравнения Лагранжа — Максвелла, канонические уравнения и методы их интегрирования, неголономные системы, вариационные принципы механики. Содержатся многочисленные примеры, иллюстрирующие применение рассматриваемых методов к решению конкретных задач. Во втором издании отражено существенное развитие аналитической механики за последние два десятилетия.

Для студентов технических вузов, аспирантов и инженеров различных отраслей промышленности.

Ил. 86. Библиогр. 49 назв.

Рецензент
доктор физико-математических наук *В. Г. Демин*

Учебное издание

БУТЕНИН Николай Васильевич, ФУФАЕВ Николай Алексеевич

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ

Заведующий редакцией *Л. А. Русаков*
Редактор *В. И. Левантовский*. Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*. Корректоры *О. А. Бутусова, Е. Б. Тихонова*

ИБ № 12281

Сдано в набор 07 06 90. Подписано к печати 14 05 91. Формат 60×90/16. Бумага кн.-журнальная. Гарнитура обыкновенная Печать высокая. Усл. печ. л. 16. Усл кр-отт. 16,25. Уч.-изд. л. 16,86. Тираж 11 750 экз. Заказ № 235. Цена 2 р.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск 77, Станиславского, 25

Б $\frac{1603020000-066}{053(02)-91}$ 59-91

ISBN 5-02-014221-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

С момента первого издания книги, написанного Н. В. Бутениным, прошло почти два десятилетия. За это время аналитическая механика получила существенное развитие в области составления уравнений движения систем с неудерживающими связями, с неголономными связями, в методах аналитического исследования уравнений движения, в теории устойчивости движения и др. Стремление как-то отразить это развитие, а также несколько расширить круг читателей, для которых эта книга могла бы оказаться полезной (например, для студентов физико-математических факультетов в университетах), привело к необходимости внести в текст некоторые изменения и дополнения. Значительно расширен раздел, посвященный неголономным системам, что связано как с научными интересами одного из соавторов настоящего издания, так и с тем, что книга Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева «Динамика неголономных систем» к настоящему времени стала почти библиографической редкостью.

Разработка новой техники и широкое применение ЭВМ значительно расширили круг задач, решаемых с помощью методов аналитической механики. В наши дни аналитическая механика все глубже проникает в инженерную практику, в частности, через аппарат теории гамильтоновых систем. Методы этой теории обладают высокой степенью алгоритмичности и, следовательно, легко поддаются компьютеризации.

Н. В. Бутенин
Н. А. Фуфаев

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая читателю книга входит в серию учебных пособий, дополняющую курс теоретической механики Н. В. Бутенина, Я. Л. Лунца и Д. Р. Меркина (М., 1970—1971 г). Издание этих дополнений связано с тем, что учащиеся некоторых втузов нуждаются в более подробном ознакомлении с рядом важнейших разделов, кроме изложенных в основном курсе. Книги, входящие в названную серию, посвящены аналитической механике, теории устойчивости, теории механических колебаний, теории гироскопов. В дальнейшем серию предполагается продолжить.

Эта книга предназначена для ознакомления учащихся с рядом разделов аналитической механики и ее методов, которые находят или могут найти приложение при решении инженерно-технических задач.

Цель настоящей книги — изложение методов аналитической механики и иллюстрация применения их к решению конкретных задач. Поэтому некоторые теоретические положения приводятся без доказательств, со ссылкой на источники, где эти доказательства приведены.

Автор благодарен профессорам Ю. И. Неймарку, Н. Н. Поляхову, Н. А. Фуфаеву и доценту Л. Г. Наумовой за ценные советы, которые позволили значительно улучшить содержание книги.

Н. В. Бутенин

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

§ 1.1. Свободные и несвободные материальные системы. Связи и их классификация. Обобщенные координаты

Совокупность материальных точек называется *системой материальных точек* или *материальной системой*, если движение каждой из них в отдельности зависит от движения и положения остальных точек. Это значит, что между точками материальной системы существуют силы взаимодействия *).

Материальная система, для которой расстояния между двумя любыми ее точками не изменяются, называется *твердым телом.*

Если каждая точка материальной системы может занять любое положение в пространстве и иметь любую скорость, то такую материальную систему называют *свободной.* Классическим примером свободной материальной системы может служить солнечная система. Между всеми планетами и Солнцем существуют силы ньютоновского тяготения, положения же и скорости самих планет и Солнца ничем не ограничены.

Если вследствие каких-либо ограничений (условий) точки и тела, составляющие материальную систему, не могут занять произвольного положения в пространстве и иметь произвольные скорости, то такая материальная система называется *несвободной.*

Ограничения (условия), которые не позволяют точкам материальной системы занимать произвольное положение в пространстве и иметь произвольные скорости, называются *связями.* Связь налагает ограничения на изменение координат и скоростей точек. Аналитически эти ограничения записываются в виде уравнений или неравенств. При физической реализации указанных ограничений на материальную систему будут действовать дополнительные силы, которые называются *реакциями связей.* Эти силы, в отличие от задаваемых сил, заранее не известны и определяются в процессе движения системы.

Пусть материальная система состоит из N точек, а декартовыми координатами ν-й точки будут x_ν, y_ν, z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Если на материальную систему будет наложена одна связь, то в

---

*) Напомним, что силы взаимодействия между точками материальной системы называются внутренними силами. Силы, действующие на точки материальной системы со стороны точек и тел, не принадлежащих данной системе, называются внешними.

общем случае аналитически это можно записать в виде*)

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N, t) \leqslant 0, \qquad (1.1)$$

где $\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ — проекции скорости ν-й точки на оси декартовой системы координат, а t — время. В случае знака равенства в выражении (1.1) связь называется *удерживающей*; если стоит знак неравенства, то связь называется *неудерживающей*.

Пусть две материальные точки, положение которых определяется соответственно координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, связаны между собой жестким стержнем длиною l. В этом случае связь является удерживающей и ее уравнение имеет вид

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

т. е. расстояние между этими точками все время остается неизменным.

Если же стержень заменить гибкой нерастяжимой нитью, то точки получат возможность сближаться, но, как и прежде, удалиться друг от друга на расстояние, большее l, не смогут. В этом случае связь будет неудерживающей и ограничения на координаты запишутся в виде неравенства

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \leqslant 0.$$

В дальнейшем будут рассматриваться только удерживающие связи**).

Если уравнение удерживающей связи

$$f(x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu, t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \qquad (1.2)$$

содержит явно время t, то связь называется *реономной*, или *нестационарной*.

Примером такой связи может служить негибкий стержень, соединяющий две материальные точки и изменяющий свою длину l *заданным* образом, например, $l = l_1 + l_0 \sin t$. Уравнение связи в этом случае содержит время t и имеет вид

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (l_1 + l_0 \sin t)^2 = 0,$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты точек.

Связь, накладывающая ограничения только на координаты точек системы, т. е. связь, уравнение которой не содержит производных от координат:

$$f(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) = 0, \qquad (1.3)$$

---

*) Будем предполагать здесь и в дальнейшем, что функция f непрерывна и имеет непрерывные производные по всем аргументам.

**) При наличии неудерживающих связей движение материальной системы можно разбить на участки свободного и несвободного движения. Несвободного, когда в выражении (1.1) имеется знак равенства, и свободного, когда стоит знак неравенства.

называется *геометрической*, или *голономной*. Связь же, уравнение которой имеет вид (1.2), называется *кинематической*.

Если уравнение (1.2) кинематической связи путем интегрирования нельзя привести к виду (1.3), не содержащему производных, то эта связь называется *неголономной*, или *неинтегрируемой*. Если же уравнение кинематической связи (1.2) может быть путем интегрирования приведено к виду (1.3), то связь, по существу, будет голономной.

Пусть, например, уравнение связи, наложенной на материальную систему, будет

$$\sum_{\nu=1}^{N} (x_\nu \dot{x}_\nu + y_\nu \dot{y}_\nu + z_\nu \dot{z}_\nu) = 0.$$

После его интегрирования получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2\right) = c$$

(c — произвольная постоянная интегрирования). Следовательно, данная связь является геометрической.

Голономная связь называется *склерономной*, или *стационарной*, в случае, когда ее уравнение не содержит явно времени t, т. е. уравнение связи имеет вид

$$f(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu) = 0.$$

Заметим, что неголономная связь может оказаться реономной даже в случае, когда ее уравнение не содержит явно времени t (см. гл. 6, § 1).

Пусть на материальную систему наложено m связей, уравнения которых имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{N} (A_{\mu\nu} \dot{x}_\nu + B_{\mu\nu} \dot{y}_\nu + C_{\mu\nu} \dot{z}_\nu) + D_\mu = 0 \qquad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где коэффициенты $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $C_{\mu\nu}$, D_μ являются функциями координат и времени. Если эта система уравнений интегрируема, то связи будут голономными, в противном случае — неголономными.

Материальная система, на которую наложены голономные связи, называется *голономной*, а материальная система хотя бы с одной неголономной связью — *неголономной*.

В настоящей книге основное внимание уделено голономным системам, т. е. рассматриваются материальные системы со связями, уравнения которых могут быть записаны в форме

$$f_j(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu,\ t) = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{1.4}$$

где k — число связей.

Рассмотрим несколько примеров голономных связей.

Пример 1.1. Точка M_1, к которой присоединена на нерастяжимом стержне длиной l точка M_2, движется по дуге окружности радиусом R

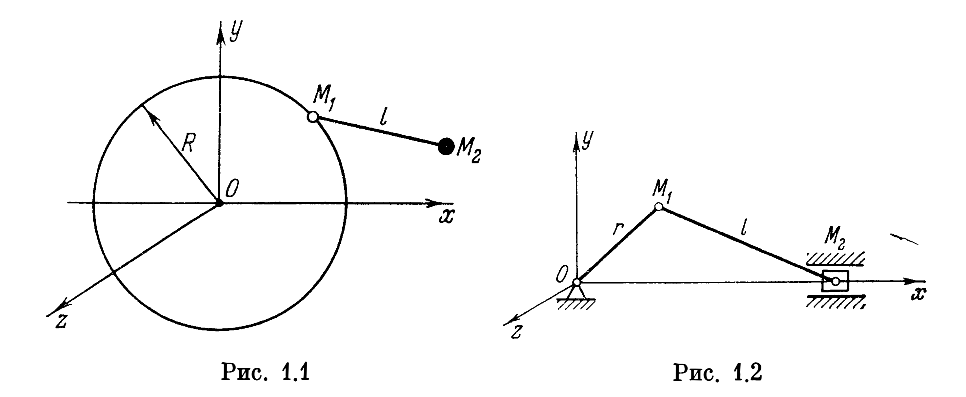


Рис. 1.1 Рис. 1.2

(рис. 1.1), расположенной в вертикальной плоскости. Обозначим координаты точки M_1 через x_1, y_1, z_1, а координаты точки M_2 — через x_2, y_2, z_2; тогда уравнениями связей будут

$$z_1 = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

Пример 1.2. Для точек M_1 и M_2 кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рис. 1.2, уравнения связей имеют вид

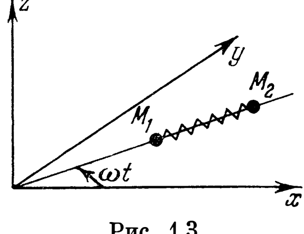


Рис. 1.3

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad y_2 = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — соответственно координаты точек M_1 и M_2.

Пример 1.3. Стержень вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. По стержню могут свободно двигаться две материальные точки M_1 и M_2, соединенные между собой пружиной (рис. 1.3). В этом случае для системы точек M_1 и M_2 связь уже будет реономной (нестационарной), так как в уравнения связей

$$x_1 \sin \omega t - y_1 \cos \omega t = 0,$$

$$x_2 \sin \omega t - y_2 \cos \omega t = 0,$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0$$

входит время t.

Обобщенными координатами материальной системы называются независимые параметры, полностью определяющие ее по-

ложение (конфигурацию), т. е. определяющие положение каждой точки системы.

Пусть на материальную систему, состоящую из N точек, наложено k геометрических связей. Это значит, что не все декартовы координаты точек системы независимы друг от друга. В самом деле, на $3N$ координат наложено k независимых уравнений связей. Решая эти уравнения связей относительно k каких-либо координат, мы выразим эти k координат через остальные $3N-k$. Эти $3N-k$ координат, которые могут принимать произвольные значения, и определяют положение точек системы. Таким образом, число обобщенных координат будет равно

$$n=3N-k. \tag{1.5}$$

Заметим, что решить систему (1.3) можно лишь относительно тех координат, для которых функциональный определитель (якобиан)

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial \beta_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta_k} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_k} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial \beta_k} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

не равен нулю. В определителе (1.6) через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ обозначены те декартовы координаты, для которых этот определитель не равен нулю.

В качестве обобщенных координат можно выбирать не только декартовы координаты точек системы, но также углы поворота, а в электромеханических системах (см. § 3.7) даже заряды на конденсаторах; вот почему эти координаты называются обобщенными.

В каждом конкретном примере обобщенные координаты можно ввести различным образом, и часто удачный выбор предопределяет успех в решении задачи. В рассмотренном выше примере 1.1 в качестве обобщенных координат целесообразно ввести три угла: угол φ, определяющий положение точки M_1 на окружности $x_1^2+y_1^2=R^2$, и два угла ψ, θ, определяющие положение стержня M_1M_2. В примере 1.2 удобно ввести угол φ между стержнем OM_1 и осью x, который определяет положение всей системы. В примере 1.3 в качестве двух обобщенных координат целесообразно ввести расстояние ξ точки M_1 до начала координат и расстояние η между точками M_1 и M_2.

Заметим, что при введении обобщенных координат все уравнения геометрических связей удовлетворяются тождественно.

§ 1.2. Возможные, действительные и виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Понятие идеальных связей

Понятия о возможных, действительных и виртуальных перемещениях точек материальной системы являются одними из фундаментальных понятий аналитической механики. Введем сначала эти понятия на примере одной материальной точки.

Предположим, что материальная точка подчинена связи, уравнение которой имеет вид

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0. \tag{1.7}$$

Пусть закон движения точки, обусловленный действующими на точку силами, будет

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t). \tag{1.8}$$

Подставляя закон (1.8) в уравнение связи (1.7), получим тождество

$$f[x(t),\ y(t),\ z(t),\ t]\equiv 0. \tag{1.9}$$

После дифференцирования этого тождества по времени будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \tag{1.10}$$

Предположим, что в какой-либо фиксированный момент времени $t=t_0$ материальная точка имеет координаты x_0, y_0, z_0. Для этого момента времени условие (1.10) примет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\dot{x}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\dot{y}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0\dot{z}+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0=0, \tag{1.11}$$

где индекс 0 означает, что все четыре производные вычислены для значений x_0, y_0, z_0 и t_0. Производные $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$, входящие в условие (1.11), также соответствуют моменту времени $t=t_0$. Выражение (1.11) представляет собой условие, которому должны удовлетворять в данный момент времени $t=t_0$ проекции $\dot{x}=v_x$, $\dot{y}=v_y$, $\dot{z}=v_z$ скорости точки

$$\mathbf{v}=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k}.$$

Эту скорость называют *действительной скоростью.*

Если связь стационарная, то ее уравнение имеет вид

$$f(x,\ y,\ z)=0 \tag{1.12}$$

и условие (1.11) упрощается:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\dot{x}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\dot{y}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0\dot{z}=0. \tag{1.13}$$

Действительным перемещением материальной точки называется вектор

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt. \qquad (1.14)$$

Проекции этого вектора $dx = \dot{x}\,dt$, $dy = \dot{y}\,dt$ и $dz = \dot{z}\,dt$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0, \qquad (1.15)$$

которое получается из уравнения (1.10) путем умножения его на dt. Однако уравнение (1.15) возможно удовлетворить и какой-то другой совокупностью величин dx, dy, dz, которые можно рассматривать как компоненты некоторого вектора $d\mathbf{r}$. Любой вектор

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

удовлетворяющий уравнению (1.15), называется *вектором возможного перемещения.* Иначе говоря, *возможное перемещение* — это перемещение $d\mathbf{r}$, совместимое с наложенной связью и совершаемое за бесконечно малый промежуток времени dt. Отсюда следует, что действительное перемещение материальной точки — это одно из возможных перемещений, которое осуществляется при заданных начальных условиях.

Возможными перемещениями точек материальной системы называются векторы

$$d\mathbf{r}_\nu = dx_\nu\mathbf{i} + dy_\nu\mathbf{j} + dz_\nu\mathbf{k} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \qquad (1.16)$$

Очевидно, что проекции этих векторов должны удовлетворять системе k уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}dz_\nu\right) + \frac{\partial f_\mu}{\partial t}dt = 0$$
$$(\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \qquad (1.17)$$

если геометрические связи, наложенные на систему, заданы в виде уравнений

$$f_\mu(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots,\ x_N,\ y_N,\ z_N,\ t) = 0$$
$$(\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \qquad (1.18)$$

Тогда действительное перемещение точек материальной системы — это одно из возможных перемещений (1.16).

Перейдем к определению понятия виртуального перемещения. Предположим, что точка находится на поверхности $f(x,\ y,\ z,\ t) = 0$. Радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ в фиксированный момент времени t определяет положение точки. Рассмотрим теперь множество бесконечно близких положений точки, допускаемых связью в этот фиксированный момент времени. Пусть эти бесконечно

близкие положения определяются радиусом-вектором

$$\mathbf{r}'(t)=\mathbf{r}(t)+\delta\mathbf{r}=(x+\delta x)\mathbf{i}+(y+\delta y)\mathbf{j}+(z+\delta z)\mathbf{k},$$

где δx, δy, δz — проекции вектора $\delta\mathbf{r}$. Вектор

$$\delta\mathbf{r}=\delta x\mathbf{i}+\delta y\mathbf{j}+\delta z\mathbf{k}$$

представляет собой бесконечно малое приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ при мысленном перемещении точки из положения, определяемого радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$, в положение, определяемое радиусом-вектором $\mathbf{r}'(t)$. Этот вектор называется *вектором виртуального перемещения*. Таким образом, вектор виртуального перемещения представляет собой бесконечно малый вектор, который позволяет мысленно, не нарушая связи, перевести точку из одного ее положения в бесконечно близкое, относящееся к тому же моменту времени. Вектор $\delta\mathbf{r}$ иначе называют вариацией вектора $\mathbf{r}$, а его проекции δx, δy, δz — вариациями координат.

Проекции $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ векторов $\mathbf{r}'(t)$ должны удовлетворять уравнению связи (1.7), т. е.

$$f(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z,\ t)=0.$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням δx, δy, δz, учитывая, что $f(x, y, z, t)=0$, и пренебрегая членами порядка малости выше первого, получаем условие, накладывающее ограничение на вариации координат:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0. \tag{1.19}$$

Поскольку при получении выражения (1.19) время считается фиксированным, то вариации δx, δy, δz называются *изохронными*.

Если связь, которой подчинено движение материальной точки, стационарная, то проекции (dx, dy, dz) возможного перемещения $d\mathbf{r}$ удовлетворяют, в соответствии с (1.21), уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,$$

т. е. в этом случае вектор возможного перемещения совпадает с одним из виртуальных перемещений. Таким образом, если связь стационарна, то множество виртуальных перемещений совпадает с множеством возможных перемещений.

Условию (1.19) можно дать геометрическую интерпретацию. Уравнение связи $f(x, y, z, t)=0$ в фиксированный момент времени можно рассматривать как уравнение поверхности. Тогда из условия (1.19) вытекает, что виртуальные перемещения точки $\delta\mathbf{r}$ представляют собой векторы, расположенные в касательной плоскости, проведенной в той точке поверхности, в которой в

данный (фиксированный) момент времени находится материальная точка (рис. 1.4).

Виртуальными перемещениями точек материальной системы, подчиненной k связям вида (1.18), называют совокупность бесконечно малых векторов

$$\delta \mathbf{r}_\nu = \delta x_\nu \mathbf{i} + \delta y_\nu \mathbf{j} + \delta z_\nu \mathbf{k},$$

проекции которых удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k). \qquad (1.20)$$

Отметим, что при стационарных связях в соответствии с условием (1.17) проекции действительных перемещений удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} dz_\nu \right) = 0 \ (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Это значит, что для стационарных связей действительные перемещения совпадают с одним из виртуальных перемещений. Материальная система, состоящая из N точек, имеет $3N$ вариаций координат. Однако в силу уравнений (1.20) эти вариации координат не являются независимыми друг от друга. Решая уравнения (1.20) относительно k вариаций координат, для которых это решение возможно, мы их выразим через остальные $3N-k$. Следовательно, независимых вариаций координат будет $3N-k$.

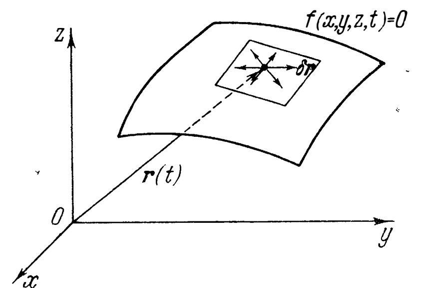


Рис. 1.4

Если на точки материальной системы в данном положении и в фиксированный момент времени действует система сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., $\mathbf{F}_N$, а виртуальные перемещения точек системы равны $\delta\mathbf{r}_1$, $\delta\mathbf{r}_2$, ..., $\delta\mathbf{r}_N$, то *виртуальной работой* называется работа этих сил на виртуальных перемещениях системы, т. е.

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu, \qquad (1.21)$$

или

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu). \qquad (1.22)$$

Определим понятие идеальных удерживающих связей. *Идеальными связями* называются такие удерживающие связи, для

которых работа реакций связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю, т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0, \tag{1.23}$$

где $\mathbf{R}_\nu$ — реакция связи, приложенная к ν-й точке.

Заметим, что соотношение (1.23), которое служит определением идеальности связей, не накладывает на виртуальные перемещения точек материальной системы никакого дополнительного ограничения. Следовательно, коэффициенты при вариациях координат в этом соотношении должны выражаться в виде линейных комбинаций коэффициентов в уравнениях, которым удовлетворяют виртуальные перемещения в силу наложенных на систему связей. Исходя из (1.23), выразим реакции связей с помощью неопределенных множителей Лагранжа.

Записав условие (1.23) в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} (R_{\nu x}\delta x_\nu + R_{\nu y}\delta y_\nu + R_{\nu z}\delta z_\nu) = 0, \tag{1.24}$$

вспомним, что вариации координат δx_ν, δy_ν, δz_ν подчинены уравнениям (1.20). Каждое из этих k уравнений этой системы умножим соответственно на неопределенные множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, которые могут быть функциями координат и времени:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\mu \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Полученные выражения сложим:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left[\delta x_\nu \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} + \delta y_\nu \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu} + \delta z_\nu \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} \right] = 0. \tag{1.25}$$

Вычтя теперь из соотношения (1.24) выражение (1.25), получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left[\delta x_\nu \left(R_{x\nu} - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \right) + \right.$$
$$\left. + \delta y_\nu \left(R_{y\nu} - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu} \right) + \delta z_\nu \left(R_{z\nu} - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} \right) \right] = 0. \tag{1.26}$$

Так как в силу уравнений (1.20) число независимых вариаций координат равно $3N - k$, то выберем множители Лагранжа λ_1, $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ таким образом, чтобы коэффициенты при k вариациях координат обращались в нуль. Оставшиеся в выражении (1.26) $3N - k$ вариации координат будут независимы, и поэтому

множители при них также должны быть равны нулю *). Таким образом,

$$R_{x\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}, \quad R_{y\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu},$$
$$R_{z\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}. \tag{1.27}$$

Приведем примеры идеальных связей.

Пример 1.4. Связь между двумя материальными точками M_1 и M_2 осуществлена в виде абсолютно жесткого стержня (рис. 1.5). Пусть $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ — соответственно реакции связей, приложенных к точкам M_1 и M_2. Работа реакций на виртуальных перемещениях точек

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot (\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2) = 0,$$

так как $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1$; реакция $\mathbf{R}_1$ направлена вдоль стержня, т. е. $\mathbf{R}_1 = \lambda(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, и из условия неизменности расстояния l между точками M_1 и M_2, выражаемого соотношением $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = l^2$, находим $2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2) = 0$.

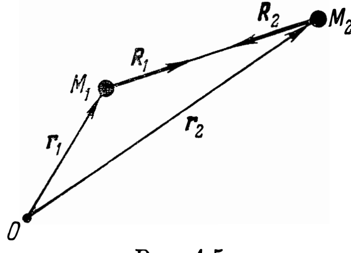


Рис. 1.5

Пример 1.5. Точка движется по внутренней стороне абсолютно гладкой поверхности параболоида вращения

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - az = 0.$$

По условию поверхность абсолютно гладкая; следовательно, реакция направлена по нормали к поверхности, но виртуальные перемещения расположены в касательной плоскости. Значит, реакция $\mathbf{R}$ перпендикулярна к $\delta\mathbf{r}$ и $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$. Приведем другое доказательство, с использованием множителя Лагранжа. Так как реакция направлена по нормали к поверхности, то можно записать

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

или

$$\frac{R_x}{2x} = \frac{R_y}{2y} = \frac{R_z}{-a} = \lambda.$$

Отсюда имеем $R_x = \lambda 2x$, $R_y = \lambda 2y$, $R_z = -\lambda a$. Тогда

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = R_x\delta x + R_y\delta y + R_z\delta z = \lambda(2x\,\delta x + 2y\,\delta y - a\,\delta z) = 0,$$

так как на основании уравнения связи вариации координат δx, δy и δz удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z = 0,$$

которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$2x\,\delta x + 2y\,\delta y - a\,\delta z = 0.$$

*) Обоснование возможности такого подбора λ дано, например, в книге [40].

Заметим, что виртуальная работа реакций при качении твердого тела без скольжения всегда равна нулю. Хотя в этом случае вектор $\mathbf{R}$ может быть направлен произвольно, но в точке приложения реакции $\mathbf{R}$ виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}=0$, если поверхность, по которой катится тело, неподвижна. В том случае, когда тело *1* катится без скольжения по движущемуся телу *2*, виртуальная работа реакций взаимодействия между телами $\mathbf{R}_{12}\delta\mathbf{r}_1+\mathbf{R}_{21}\delta\mathbf{r}_2$ также равна нулю, потому что в силу третьего закона Ньютона $\mathbf{R}_{12}=-\mathbf{R}_{21}$, а из-за отсутствия проскальзывания $\delta\mathbf{r}_1=\delta\mathbf{r}_2$.

Наглядным примером реакции этого случая может служить шестереночное зацепление.

В дальнейшем будут рассматриваться только идеальные связи.

§ 1.3. Число степеней свободы материальной системы. Обобщенные силы

В § 1.1 было установлено, что положение материальной системы, подчиненной k голономным связям, определяется $n=3N-k$ независимыми параметрами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, которые называются обобщенными координатами. По определению, *числом степеней свободы системы материальных точек* называется число независимых вариаций обобщенных координат. Все $3N$ декартовых координат можно выразить через введенные параметры $q_1, q_2, \ldots, q_n$ посредством функциональных соотношений

$$\begin{aligned} x_\nu &= x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),\\ y_\nu &= y_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),\\ z_\nu &= z_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \quad (\nu=1, 2, \ldots, N). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Эти функции обращают в тождество уравнения связей (1.18).

Уравнения (1.28) могут быть записаны в векторной форме:

$$\mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i}+y_\nu\mathbf{j}+z_\nu\mathbf{k}=\mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t). \tag{1.29}$$

При наличии стационарных связей функции (1.28) можно выбрать так, чтобы они не содержали явно времени t, т. е. имели вид

$$\begin{aligned} x_\nu &= x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n),\\ y_\nu &= y_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n),\\ z_\nu &= z_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n) \quad (\nu=1, 2, \ldots, N). \end{aligned} \tag{1.30}$$

При этом радиусы-векторы точек системы также будут функциями только обобщенных координат:

$$\mathbf{r}_\nu=\mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n) \quad (\nu=1, 2, \ldots, N). \tag{1.31}$$

Пример 1.6. Положение сферического маятника длины l можно определить двумя углами: $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$ (рис. 1.6).

Уравнения (1.30) в этом случае имеют вид

$$x = l\sin\theta\cos\varphi = l\sin q_1\cos q_2,$$

$$y = l\sin\theta\sin\varphi = l\sin q_1\sin q_2,$$

$$z = l\cos\theta = l\cos q_1.$$

Дифференциалы от функций (1.28), вычисленные в предположении, что время t фиксировано, имеют вид

$$\tilde{d}x_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\tilde{d}q_i,\quad \tilde{d}y_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_i}\tilde{d}q_i,$$

$$\tilde{d}z_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\tilde{d}q_i.$$

Найдем дифференциалы при фиксированном t от тождеств, которые получаются из уравнений связей после подстановки в них функций (1.28):

$$f_\mu(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\tilde{d}x_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}\tilde{d}y_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\tilde{d}z_\nu\right) = 0$$

$$(\mu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k).$$

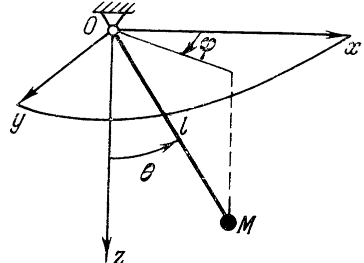


Рис. 1.6

Полученные уравнения совпадают с уравнениями (1.20). Следовательно, дифференциалы $\tilde{d}x_\nu$, $\tilde{d}y_\nu$, $\tilde{d}z_\nu$ совпадают с вариациями координат δx_ν, δy_ν, δz_ν.

Таким образом, мы установили «рецептуру» вычисления вариаций координат. Как для стационарной связи, так и для нестационарной вариации координат будем вычислять по формулам

$$\delta x_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\delta q_i,\quad \delta y_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_i}\delta q_i,\quad \delta z_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\delta q_i. \quad (1.32)$$

Здесь $\delta q_i = \tilde{d}q_i$ называются *вариациями обобщенных координат.*

Отсюда следует, что для голономной системы число степеней свободы совпадает с числом обобщенных координат, потому что вариации всех обобщенных координат оказываются независимыми. Для неголономной системы это не так (см. гл. 6): число степеней свободы неголономной системы меньше числа обобщенных координат на число уравнений неголономных связей.

В соответствии с выражениями (1.29) и (1.32) для виртуальных перемещений будем иметь

$$\delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{1.33}$$

Подставляя соотношение (1.33) в выражение для виртуальной работы

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu,$$

получим

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Внося $\mathbf{F}_\nu$ под знак второй суммы и меняя порядок суммирования, будем иметь

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta q_i \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

Суммы

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{N} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \right)$$
$$(i=1,2, \ldots, n) \tag{1.34}$$

называются *обобщенными силами.* Каждой обобщенной координате q_i соответствует своя обобщенная сила Q_i. Итак,

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n. \tag{1.35}$$

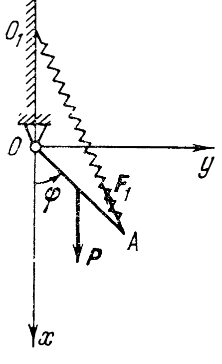


Рис. 1.7

Отметим, что размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность обобщенной координаты.

Выражение (1.35) позволяет дать следующее определение обобщенных сил: *обобщенными силами называются коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы.*

Пример 1.7. Однородный стержень OA, вес которого P, может вращаться вокруг перпендикулярной к нему горизонтальной оси O без трения (рис. 1.7). К концу A стержня прикреплена пружина $O_1A = l$. Точка O_1 крепления пружины находится от точки O по вертикали вверх на расстоянии O_1O, причем $O_1O = OA = r$. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна l_0. Найти обобщенную силу, приняв за обобщенную координату угол φ.

В соответствии с рис. 1.7 запишем

$$x_A = r\cos\varphi, \quad y_A = r\sin\varphi,$$

$$x_C = \frac{r}{2}\cos\varphi, \quad y_C = \frac{r}{2}\sin\varphi,$$

где x_C, y_C — координаты центра тяжести стержня. Сила, действующая на конец стержня A со стороны пружины, равна

$$F_1 = c|l - l_0|,$$

где $l = 2r\cos(\varphi/2)$. Проекциями этой силы на оси координат будут

$$X_1 = -c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\cos\frac{\varphi}{2}, \quad Y_1 = -c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Проекциями силы **P**, приложенной в центре тяжести C стержня, будут

$$X_2 = P, \quad Y_2 = 0.$$

В нашем случае

$$Q = X_1\frac{\partial x_A}{\partial\varphi} + Y_1\frac{\partial y_A}{\partial\varphi} + X_2\frac{\partial x_C}{\partial\varphi} + Y_2\frac{\partial y_C}{\partial\varphi}.$$

Вследствие того, что

$$\frac{\partial x_A}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial y_A}{\partial\varphi} = r\cos\varphi, \quad \frac{\partial x_C}{\partial\varphi} = -\frac{r}{2}\sin\varphi,$$

получим

$$Q = cr\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{Pr}{2}\sin\varphi.$$

Пример 1.8. Найти обобщенные силы для сферического маятника (рис. 1.6), приняв за обобщенные координаты $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$. Обобщенные силы определяются формулами (1.34):

$$Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial\theta} + Y\frac{\partial y}{\partial\theta} + Z\frac{\partial z}{\partial\theta},$$

$$Q_2 = X\frac{\partial x}{\partial\varphi} + Y\frac{\partial y}{\partial\varphi} + Z\frac{\partial z}{\partial\varphi}.$$

Так как $X = Y = 0$, $Z = P$, а

$$x = l\sin\theta\cos\varphi, \quad y = l\sin\theta\sin\varphi, \quad z = l\cos\theta$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} = -l\sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0,$$

то

$$Q_1 = -Pl\sin\theta, \quad Q_2 = 0.$$

Определим теперь обобщенные силы через виртуальную работу

$$\delta A = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = P\,\delta z.$$

Так как

$$\delta z = -l\sin\theta\,\delta\theta,$$

то

$$\delta A = -Pl\sin\theta\,\delta\theta$$

и, следовательно,

$$Q_1 = -Pl\sin\theta, \quad Q_2 = 0.$$

Пример 1.9. Найти обобщенные силы для материальной системы, схема которой представлена на рис. 1.8. Веса грузов A, B и C соответственно равны P_1, P_2 и P_3. Грузы A, B перемещаются по гладкой горизонтальной поверхности. Стержни невесомы и соединены с грузами A, B и между собой идеальными цилиндрическими шарнирами. Жесткости пружин c_1 и c_2.

Рис. 1.8

Выберем начало координат O в положении равновесия груза A.

Пусть координаты точек A, B и C соответственно будут x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3. Напишем уравнения связей:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0,$$

$$[(x_3 - p) - x_1]^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

$$[(x_3 - p) - x_2]^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

Число точек в системе $N = 3$, число связей $k = 7$, следовательно, число степеней свободы $n = 2$. За обобщенные координаты примем $q_1 = s$, $q_2 = \varphi$ (см. рис. 1.8). Координатами грузов A, B и C будут

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = s,$$
$$x_2 = 0, \qquad y_2 = s + 2l \sin \varphi,$$
$$x_3 = l \cos \varphi + p, \qquad y_3 = s + l \sin \varphi.$$

Проекции активных сил $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, действующих на грузы, равны

$$X_1 = P_1, \qquad Y_1 = -c_1(s + \lambda_1),$$
$$X_2 = P_2, \qquad Y_2 = c_2(s_1 + \lambda_2) = c_2(a - s - \lambda_1 - 2l \cos \varphi),$$
$$X_3 = P_3, \qquad Y_3 = 0,$$

где λ_1 и λ_2 — статические удлинения пружин. Найдем виртуальную работу

$$\delta A = X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + X_3 \delta x_3 + Y_3 \delta y_3.$$

Так как

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = \delta s, \quad \delta x_2 = 0, \quad \delta y_2 = \delta s + 2l \cos \varphi \, \delta\varphi,$$
$$\delta x_3 = -l \sin \varphi \, \delta\varphi, \qquad \delta y_3 = \delta s + l \cos \varphi \, \delta\varphi,$$

то

$$\delta A = -c_1(s + \lambda_1)\delta s + c_2(a - s - \lambda_1 - 2l \sin \varphi)(\delta s + 2l \cos \varphi \, \delta\varphi) - P_3 l \sin \varphi \, \delta\varphi = [-c_1(s + \lambda_1) + c_2(a - s - \lambda_1 - 2l \sin \varphi)]\delta s + [c_2(a - s - \lambda_1 - 2l \sin \varphi) 2l \cos \varphi - P_3 l \sin \varphi]\delta\varphi.$$

Следовательно,

$$Q_1 = -c_1(s + \lambda_1) + c_2(a - s - \lambda_1 - 2l \sin \varphi),$$
$$Q_2 = c_2(a - s - \lambda_1 - 2l \sin \varphi) 2l \cos \varphi - P_3 l \sin \varphi.$$

§ 1.4. Понятие пространства конфигураций и фазового пространства системы материальных точек

В аналитической механике существенную помощь при исследовании движений точек материальной системы оказывает геометрическая интерпретация этих движений, опирающаяся на понятия *пространства конфигураций* и *фазового пространства* системы. Что же представляет собою пространство конфигураций? Это n-мерное пространство с системой координат, по осям кото-

рой отложены значения обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, взаимно однозначно определяющих положение всех точек материальной системы. Кроме того, любым двум близким точкам в пространстве конфигураций взаимно однозначно соответствуют два близких положения материальной системы. Эти два требования определяют структуру пространства конфигураций. Геометрическая интерпретация движения материальной системы, опирающаяся на понятие пространства конфигураций, состоит в том, что любому движению системы соответствует перемещение изображающей точки в пространстве конфигураций, и тогда под траекторией движения сложной материальной системы понимается траектория движения изображающей точки в пространстве конфигураций. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих сказанное.

Пример 1.10. Положение плоского физического маятника можно определить углом φ, который и будет обобщенной координатой $q_1 = \varphi$. Откладывая значения $q_1 = \varphi$ на прямой, мы вынуждены, соблюдая условие взаимной однозначности, ограничиться отрезком длиной 2π, т. е. выбрать из всей прямой, например, сегмент $[0, 2\pi]$. Далее следует выполнить условие близости. Для этого нужно отождествить точки O и 2π этого сегмента, т. е. нужно «склеить» концы этого отрезка. Получившаяся окружность единичного радиуса и будет представлять пространство конфигураций плоского физического маятника.

Читатель без особого труда может убедиться в том, что таким же будет и пространство конфигураций в примере 1.2 для системы, изображенной на рис. 1.2.

Пример 1.11. Плоский двойной математический маятник. Эту материальную систему, состоящую из двух точек M_1 и M_2, можно получить из системы в примере 1.1 (рис. 1.1), если наложить дополнительную связь $z_2 = 0$. Тогда, вводя в качестве обобщенных координат два угла $q_1 = \varphi$,

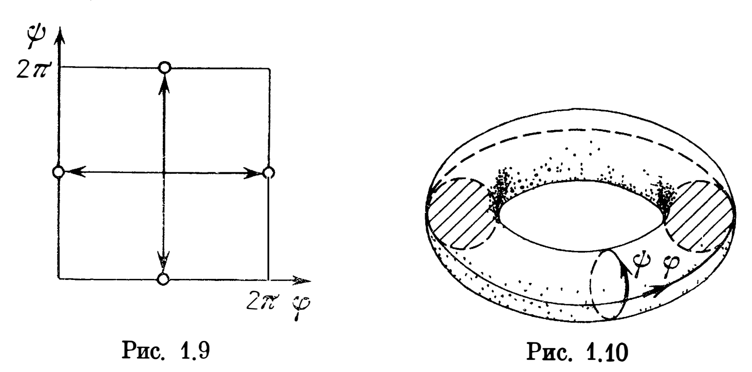


Рис. 1.9 Рис. 1.10

$q_2 = \psi$, где φ — угол, определяющий положение точки M_1 на окружности $x_1^2 + y_1^2 = R^2$, а ψ — угол между стержнем M_1M_2 и осью x, получим в качестве пространства конфигураций квадрат со сторонами длиною 2π, причем противоположные точки сторон квадрата отождествлены (рис. 1.9). Если отождествление противоположных сторон провести при помощи их «склейки» (сначала по координате ψ, а потом — по координате φ), то получим тор (рис. 1.10), который и является пространством конфигураций двойного плоского маятника.

Пример 1.12. «Сани Чаплыгина». Так называется твердое тело, опирающееся на плоскость двумя гладкими ножками, а третья ножка снабжена полукруглым лезвием (рис. 1.11). В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты x, y точки K соприкосновения лезвия с плоскостью xy и угол φ между плоскостью лезвия и осью x. Условие отсутствия скольжения лезвия в поперечном направлении проявляется в том, что скорость точки K всегда направлена вдоль лезвия, т. е. $\dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$. Полученное соотношение является уравнением кинематической связи, которое не интегрируется, т. е. не сводится к функциональной связи между координатами x, y, φ. Таким образом, сани Чаплыгина — это неголономная система. Чем же отличается пространство конфигураций этой системы от пространства конфигураций соответствующей голономной системы, которая получилась бы при замене полукруглого лезвия на гладкую ножку? Пространство конфигураций обеих систем одинаково и представляет собой трехмерный слой с отождествленными границами (рис. 1.12). Осуществить наглядно «склеивание» этих границ в трехмерном пространстве, как это было в предыдущих примерах, уже невозможно. Наличие неголономной связи приводит лишь к тому, что направление вектора смещения изображающей точки в пространстве конфигураций не может быть произвольным: его компоненты dx и dy должны удовлетворять соотношению $dy = dx \operatorname{tg} \varphi$. Однако это ограничение на бесконечно малые смещения не препятствует достижению любой точки пространства конфигураций.

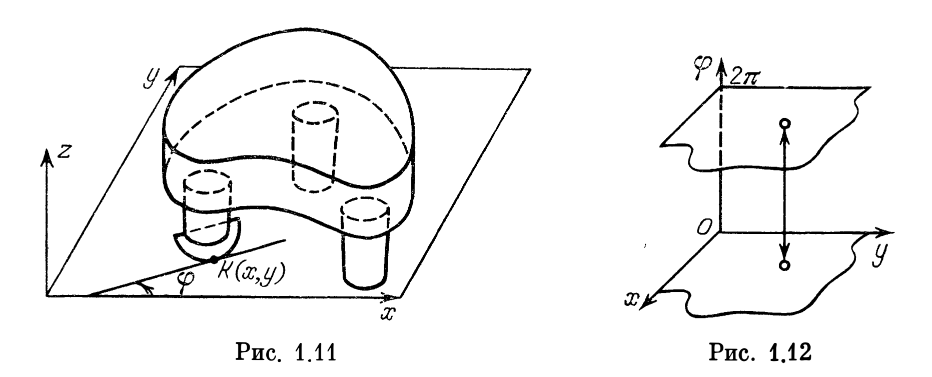


Рис. 1.11 Рис. 1.12

Введем теперь понятие *фазового пространства*. Как известно, состояние механической системы в некоторый момент времени определяется положением и скоростями всех ее точек. После введения обобщенных координат состояние системы материальных точек определяется совокупностью обобщенных координат и их производных по времени, т. е. обобщенных скоростей. Величины $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots, \dot{q}_n$ можно рассматривать как координаты точки в $2n$-мерном пространстве Φ_{2n}. Две точки в этом пространстве называются близкими, если близки соответствующие им состояния механической системы. Если между состоянием механической системы со склерономными связями и положением изображающей точки в пространстве Φ_{2n} существует взаимно однозначное соответствие, то Φ_{2n} называется *фазовым пространством* этой системы.

Приведем примеры фазовых пространств конкретных систем.

Пример 1.13. Фазовое пространство физического маятника. Поскольку положение физического маятника определяется лишь одной обобщенной координатой, за которую можно принять угол поворота маятника, состояние маятника задается величинами φ, $\dot{\varphi}$. Ставя в соответствие этим значениям точку цилиндра с цилиндрическими координатами φ и $\dot{\varphi}$, мы установим взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками цилиндра и механическим состоянием физического маятника. Поэтому фазовым пространством физического маятника является цилиндр.

Пример 1.14. Фазовое пространство двойного плоского маятника. В примере 1.11 было выяснено, что положение двойного плоского маятника определяется двумя углами: φ и ψ. Следовательно, состояние этого маятника определяют 4 величины: φ, ψ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$. Поскольку угловые скорости $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ могут изменяться в пределах $-\infty < \dot{\varphi} < +\infty$, $-\infty < \dot{\psi} < +\infty$, каждой паре значений $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ можно сопоставить точку на плоскости $\dot{\varphi}\dot{\psi}$. Таким образом, фазовое пространство двойного физического маятника будет четырехмерным. Его можно представить в виде прямого (топологического) произведения пространства конфигураций и пространства скоростей, т. е. тора и плоскости.

При наличии неголономных связей обобщенные скорости удовлетворяют ряду кинематических уравнений; поэтому число обобщенных скоростей, необходимых для определения состояния неголономной системы, может быть уменьшено на число уравнений кинематических связей.

Пример 1.15. Фазовое пространство саней Чаплыгина (см. пример 1.12). Так как положение этой системы определяется тремя обобщенными координатами x, y, φ и обобщенные скорости должны удовлетворять единственному уравнению $\dot{y} = \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi$, ее фазовое пространство Φ_5 пятимерно. Каждому состоянию саней Чаплыгина можно сопоставить в Φ_5 точку с координатами x, y, φ, $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$.

§ 1.5. Истинные координаты и квазикоординаты. Кинематические характеристики движения

В этом параграфе мы остановимся на понятиях истинных координат, квазикоординат и кинематических характеристик, которые сыграли в истории развития аналитической механики важную роль [37, 43, 47]. Истинные координаты — это обобщенные координаты q_1, q_2, ..., q_n, т. е. независимые параметры, число которых выбирается наименьшим из всех возможных чисел параметров, взаимно однозначно определяющих положение (конфигурацию) системы материальных точек. Тем самым осуществляется взаимно однозначное соответствие точек пространства конфигураций K_n и положений механической системы. Отсюда следует, что при обходе в пространстве конфигураций по замкнутому пути система всегда возвращается в исходное положение.

Наряду с понятием *положения системы*, определяемого обобщенными координатами, вводится понятие *состояния* механической системы. Состояние системы материальных точек определя-

ется их координатами и скоростями, т. е. после введения обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — совокупностью величин $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$.

Однако для определения состояния системы вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ можно использовать параметры ω_j, называемые *кинематическими характеристиками*, которые являются линейными комбинациями обобщенных скоростей

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\dot{q}_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.36}$$

В этих соотношениях коэффициенты a_{ji} зависят от обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а соотношения (1.36) допускают возможность их разрешения относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Таким образом, состояние системы материальных точек можно определить $2n$ величинами: n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и n кинематическими характеристиками $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Если кинематическую характеристику ω_j представить в виде производной по времени от некоторой величины π_j, то дифференциалы $d\pi_j$ согласно (1.36) будут связаны с дифференциалами $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ обобщенных координат при помощи соотношений

$$d\pi_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}dq_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.37}$$

которые в математике называются *пфаффовыми формами*. Если уравнения (1.37) можно проинтегрировать, то величины π_j выразятся через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ при помощи конечных (функциональных) соотношений. В этом случае величины π_j оказываются по существу новыми обобщенными координатами. Если же уравнения (1.37) являются неинтегрируемыми, то величины π_j называются *квазикоординатами*. Понятие квазикоординат (или *псевдокоординат*) появилось после того, как выяснилось, что не всякая пфаффова форма является интегрируемой. Величины π_j в случае неинтегрируемости не являются полными производными от каких бы то ни было обобщенных координат, и следовательно, совокупность значений $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ не соответствует какому-то определенному положению системы, хотя сами величины $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ могут быть измерены и имеют в конкретных задачах вполне определенный физический смысл: это может быть пройденный путь, угол поворота и т. д. При этом квазискорости $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_n$ могут представлять проекции на некоторые на-

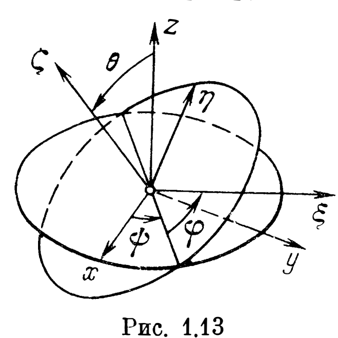


Рис. 1.13

правления (например, на подвижные оси координат) векторов линейных или угловых скоростей движения и т. д.

В качестве примера использования кинематических характеристик можно привести описание движения твердого тела с закрепленной точкой в переменных Эйлера p, q, r. Эти переменные представляют проекции мгновенной угловой скорости тела на главные оси эллипсоида инерции, построенного для закрепленной точки (рис. 1.13). Величины p, q, r выражаются через углы Эйлера θ, ψ, φ (истинные координаты) при помощи неинтегрируемых соотношений

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= p = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\ \dot{\pi}_2 &= q = \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\ \dot{\pi}_3 &= r = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Здесь величины π_1, π_2, π_3 — углы поворота тела вокруг осей ξ, η, ζ, равные

$$\pi_1 = \int_0^t p\,dt, \quad \pi_2 = \int_0^t q\,dt, \quad \pi_3 = \int_0^t r\,dt. \tag{1.39}$$

Можно установить счетчики углов и в каждый момент времени измерять значения величин π_1, π_2, π_3 точно так же, как и значения углов Эйлера θ, ψ, φ. Последовательность этих значений будет представлять последовательность точек, расположенных на некоторой кривой в пространстве квазикоординат π_1, π_2, π_3 и на соответствующей кривой в пространстве конфигураций θ, ψ, φ. Однако в то время как отдельное показание счетчиков углов Эйлера вполне определяет положение тела с закрепленной точкой, отдельно взятое показание счетчиков квазикоординат π_1, π_2, π_3 ничего не говорит о положении тела. Неинтегрируемость уравнений (1.38) приводит к тому, что при обходе в пространстве квазикоординат по замк-

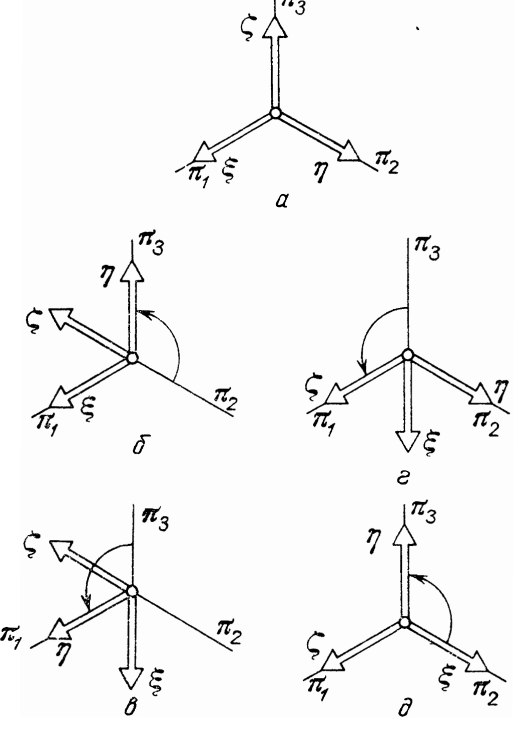


Рис. 1.14

нутому контуру тело с закрепленной точкой не возвращается в первоначальное положение.

Это обстоятельство, не позволяющее рассматривать пространство квазикоординат π_1, π_2, π_3 как пространство конфигураций, объясняется тем, что если выполнить последовательно два поворота тела, например, на угол $\pi/2$ сначала вокруг оси π_1, а затем вокруг оси π_2, то тело придет в положение, которое будет отличаться от положения, в которое тело придет при выполнении тех же поворотов, но в обратном порядке: сначала вокруг оси π_2, а затем вокруг оси π_1 (рис. 1.14). Пусть вначале оси ξ, η, ζ совпадали с осями π_1, π_2, π_3 (рис. 1.14, *а*). После поворота вокруг оси π_1 (рис. 1.14, *б*), затем вокруг оси π_2 (рис. 1.14, *в*) трехгранник займет положение, показанное на рис. 1.14, *в*. Если же сначала совершить поворот вокруг оси π_2 (рис. 1.14, *г*), а затем вокруг оси π_1 (рис. 1.14, *д*), то получим положение, показанное на рис. 1.14, *в*. Сравнение рис. 1.14, *в* и *д* наглядно убеждает в том, что эти положения трехгранника различны.

Глава 2

ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ И ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

§ 2.1. Принцип виртуальных перемещений

Принципы механики — это утверждения, принимаемые без доказательства: они в сжатой форме отображают опыт, накопленный человечеством в области механики. Следствия, вытекающие из этих принципов, обычно доступны практической проверке и всегда подтверждаются. Если хотя бы в одном случае опыт, проведенный при соблюдении всех условий, при которых сформулирован принцип, окажется отрицательным, то принцип просто неверен. Поэтому обычно и говорят, что принципы не доказываются.

В этой главе излагаются принцип виртуальных перемещений и принцип Даламбера, объединение которых естественно приводит к общему уравнению динамики — исходному уравнению для получения уравнений движения системы материальных точек в различных формах записи.

Принцип виртуальных перемещений является принципом механики, устанавливающим необходимые и достаточные условия равновесия (покоя) материальной системы.

Пусть материальная система подчинена k голономным связям, отображаемым уравнениями

$$f_\mu(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots,\ x_N,\ y_N,\ z_N)=0 \quad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{2.1}$$

и m неголономным связям, отображаемым уравнениями

$$\sum_{\nu=1}^{N}(A_{\mu\nu}\dot{x}_\nu+B_{\mu\nu}\dot{y}_\nu+C_{\mu\nu}\dot{z}_\nu)=0 \qquad (\mu=1,2,\ldots,m), \tag{2.2}$$

где $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $C_{\mu\nu}$ — функции координат.

Дифференциальные уравнения движения этой несвободной системы имеют вид

$$m_\nu\mathbf{w}_\nu=\mathbf{F}_\nu+\mathbf{R}_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{2.3}$$

где ν — номер точки, $\mathbf{w}_\nu$ — ее ускорение, m_ν — масса, $\mathbf{F}_\nu$ и $\mathbf{R}_\nu$ — соответственно равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к ν-й точке.

Под равновесием (покоем) материальной системы будем понимать такое ее положение, в котором система находится все время, если она в начальный момент времени, имея скорости, равные нулю, находилась в этом положении. Отсюда следует,

что в положении равновесия материальной системы скорости и ускорения всех ее точек равны нулю, т. е.

$$\mathbf{v}_\nu = 0, \quad \mathbf{w}_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, N),$$

или в соответствии с уравнениями (2.3)

$$\mathbf{v}_\nu = 0, \quad \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.4}$$

Сформулируем теперь *принцип виртуальных перемещений.*

При равновесии материальной системы с идеальными связями виртуальная работа всех активных сил равна нулю, т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \tag{2.5}$$

Кроме того, в соответствии с определением равновесия $\mathbf{v}_\nu(t_0) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$, где t_0 — начальный момент времени.

Убедимся в том, что условие равновесия (2.5), которое указывает принцип виртуальных перемещений, является необходимым и достаточным. Докажем сначала необходимость этого условия. Пусть система находится в положении равновесия. Это значит, что выполняется условие (2.4). Умножим скалярно второе выражение этого условия на вектор виртуального перемещения ν-й точки:

$$(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0.$$

Это выражение справедливо для любой точки материальной системы. Складывая все эти выражения, получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0,$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0.$$

Так как по предположению связи, наложенные на систему,— идеальные, то

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0$$

и, следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0.$$

Скорости всех точек равны нулю по предположению.

Докажем, что условие (2.5) будет и достаточным для равновесия системы, т. е. при выполнении условий

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0, \quad \mathbf{v}_\nu(t_0) = 0 \tag{2.6}$$

будут выполняться условия (2.4). Нетрудно видеть, что если скорости всех точек в некоторый момент времени равны нулю, то перемещения, пропорциональные ускорениям точек, являются виртуальными перемещениями системы. В самом деле, для действительного движения уравнения связей (2.1) и (2.2) должны удовлетворяться тождественно по времени t. Продифференцировав тождество (2.1) по времени, получим

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu+\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}\dot{y}_\nu+\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\dot{z}_\nu\right)=0 \quad (\mu=1,2,\ \ldots,\ k). \tag{2.7}$$

Дифференцируя второй раз, найдем

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\ddot{x}_\nu+\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}\ddot{y}_\nu+\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\ddot{z}_\nu\right)+ \\ +\sum_{\nu=1}^{N}\left(\dot{x}_\nu\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}+\dot{y}_\nu\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}+\dot{z}_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right)=0. \tag{2.8}$$

После дифференцирования тождества (2.2) по времени приходим к аналогичным соотношениям

$$\sum_{\nu=1}^{N}(A_{\mu\nu}\ddot{x}_\nu+B_{\mu\nu}\ddot{y}_\nu+C_{\mu\nu}\ddot{z}_\nu)+ \\ +\sum_{\nu=1}^{N}\left(\dot{x}_\nu\frac{dA_{\mu\nu}}{dt}+\dot{y}_\nu\frac{dB_{\mu\nu}}{dt}+\dot{z}_\nu\frac{dC_{\mu\nu}}{dt}\right)=0. \tag{2.9}$$

Так как скорости в рассматриваемый момент времени $t=t_0$ равны нулю, то последняя сумма в соотношениях (2.8) и (2.9) исчезает, и проекции ускорений $\ddot{x}_\nu$, $\ddot{y}_\nu$, $\ddot{z}_\nu$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\ddot{x}_\nu+\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}\ddot{y}_\nu+\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\ddot{z}_\nu\right)=0,\\ \sum_{\nu=1}^{N}(A_{\mu\nu}\ddot{x}_\nu+B_{\mu\nu}\ddot{y}_\nu+C_{\mu\nu}\ddot{z}_\nu)=0.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Найдем теперь уравнения, которым удовлетворяют вариации координат δx_ν, δy_ν, δz_ν. Для этого согласно процедуре Гельдера [49] нужно во всех уравнениях, которым удовлетворяют дифференциалы координат dx_ν, dy_ν, dz_ν, заменить оператор d на оператор δ и положить $\delta t\equiv 0$. Для склерономных связей, как в нашем случае, это означает, что это будут те же самые уравнения,

которым удовлетворяют компоненты скоростей $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{z}_\nu$, т. е. уравнения (2.2) и (2.7):

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\,\delta x_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}\,\delta y_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\,\delta z_\nu\right) = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}(A_{\mu\nu}\delta x_\nu + B_{\mu\nu}\delta y_\nu + C_{\mu\nu}\delta z_\nu) = 0.$$

Сравнивая эти уравнения с (2.10), убеждаемся в том, что если положить в них $\delta\mathbf{r}_\nu = \lambda\mathbf{w}_\nu$ (λ — постоянный множитель, отличный от нуля), то они просто перейдут в равенства (2.10). Отсюда следует, что перемещения, пропорциональные ускорениям точек $\mathbf{w}_\nu$, являются виртуальными перемещениями $\delta\mathbf{r}_\nu$.

Теперь легко доказать достаточность условий (2.6) для равновесия системы. Запишем первое условие (2.6) вместе с условием идеальности связей: $\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0$, $\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{R}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0$. После сложения получим

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu)\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0.$$

Предположим, что равновесие системы нарушилось и, следовательно, точки приобрели ускорения $\mathbf{w}_\nu$. Тогда возьмем в качестве виртуального перемещения систему векторов, пропорциональных ускорениям точек $\delta\mathbf{r}_\nu = \lambda\mathbf{w}_\nu$, и подставим ее в последнее равенство:

$$\lambda\sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu)\cdot\mathbf{w}_\nu = 0.$$

Учитывая, что для каждой точки справедлив второй закон Ньютона $m_\nu\mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu$, получим

$$\lambda\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu w_\nu^2 = 0.$$

Это равенство может выполниться только в том случае, если все $\mathbf{w}_\nu = 0$. Следовательно,

$$m_\nu\mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

что и требовалось доказать, так как мы получили условия, которые должны выполняться при равновесии системы, т. е. уравнения (2.4). Начальные же скорости равны нулю по условию (2.5)*).

---

*) Рассмотрение различных доказательств достаточности условия (2.5) приведено в книге [40] (с. 377—384).

Принцип виртуальных перемещений позволяет определить положение равновесия несвободной материальной системы, не вводя в рассмотрение неизвестные реакции идеальных связей, так как в формулировку принципа эти реакции не входят.

Однако принцип виртуальных перемещений может быть применен и для нахождения реакций идеальных связей. Для этого, в соответствии с принципом освобождаемости, следует отбросить связь и заменить ее действие реакцией, а затем включить эту реакцию в число активных сил. При этом следует помнить, что при отбрасывании связи увеличивается число степеней свободы системы.

Если наложенные на систему связи не идеальные, то непосредственно принцип виртуальных перемещений к таким системам неприменим. Однако в этом случае, например, при движении точек по негладким поверхностям, следует реакции разложить на нормальные составляющие и силы трения. Далее принять, что связи идеальные, а силы трения отнести к активным силам. Конечно, при этом следует учитывать условия равновесия при наличии трения *).

Пример 2.1. Тяжелый однородный стержень длиною $2l$ опирается промежуточной точкой на выступ B. Другой конец стержня удерживается невесомой нитью длины l, прикрепленной к точке O (рис. 2.1). Дано: $OA = OB = l$. Найти угол φ, образуемый стержнем с горизонтальной линией при равновесии. Стержень считать гладким, точки O и B находятся на одной горизонтали.

Активная сила здесь одна — сила тяжести P, приложенная в центре масс стержня C. Согласно формуле (2.5) условием равновесия стержня будет

$$\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r}_C = P\delta x_C = 0 \quad \text{или} \quad \delta x_C = 0.$$

Так как $x_C = l \sin 2\varphi - l \sin \varphi$, то

$$\delta x_C = l(2\cos 2\varphi - \cos\varphi)\delta\varphi = 0.$$

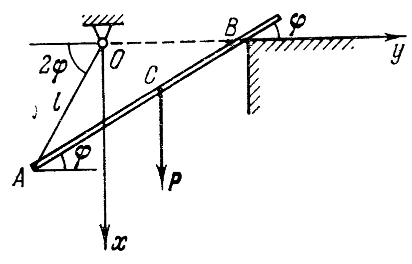


Рис. 2.1

Поскольку $\delta\varphi$ выбирается произвольно, можно считать $\delta\varphi \neq 0$ и, следовательно,

$$2\cos 2\varphi - \cos\varphi = 0,$$

или

$$4\cos^2\varphi - \cos\varphi - 2 = 0,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx 0{,}842.$$

Пример 2.2. Определить реакцию опоры C трехпролетной разрезной балки (рис. 2.2, *а*).

Заменим действие опоры C реакцией $\mathbf{R}_C$. На рис. 2.2, *б* показано одно из виртуальных перемещений системы. Согласно принципу виртуальных

*) См., например, [10] (с. 82—90).

перемещений при равновесии балки должно выполняться условие

$$\mathbf{P}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_C \cdot \delta\mathbf{r}_C + \mathbf{P}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{P}_3 \cdot \delta\mathbf{r}_3 = \\ = P_1|\delta\mathbf{r}_1| - R_C|\delta\mathbf{r}_C| + P_2|\delta\mathbf{r}_2| - P_3|\delta\mathbf{r}_3| = 0, \quad (2.11)$$

где $\delta\mathbf{r}_1$, $\delta\mathbf{r}_2$, $\delta\mathbf{r}_3$, $\delta\mathbf{r}_C$ — виртуальные перемещения точек балки, к которым приложены силы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ и реакция $\mathbf{R}_C$. Поскольку мы отбросили опору C, балка получила одну степень свободы. Положение балки теперь мож-

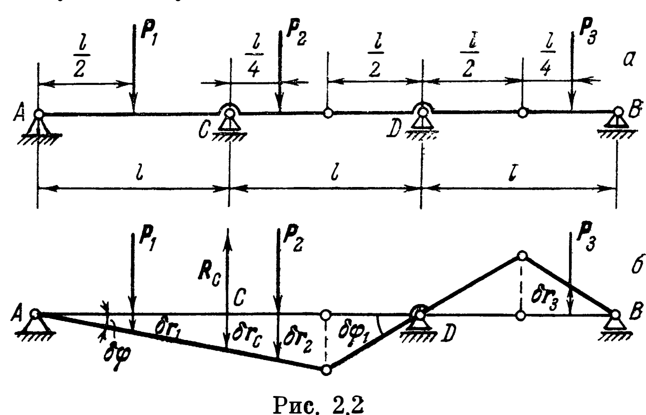


Рис. 2.2

но определить углом φ поворота левой части балки вокруг точки A (в положении равновесия $\varphi = 0$). При сообщении балке, находящейся в равновесии, выбранного виртуального перемещения величины $|\delta\mathbf{r}_1|$, $|\delta\mathbf{r}_2|$, $|\delta\mathbf{r}_3|$ и $|\delta\mathbf{r}_C|$ можно заменить через вариацию $\delta\varphi$ угла φ по следующим соотношениям (см. рис. 2.2, *б*):

$$|\delta\mathbf{r}_1| = \frac{l}{2}\,\delta\varphi, \quad |\delta\mathbf{r}_C| = l\,\delta\varphi,$$

$$|\delta\mathbf{r}_2| = \frac{5}{4}\,l\,\delta\varphi, \quad |\delta\mathbf{r}_3| = \frac{l}{4}\,\delta\varphi_1 = \frac{3}{4}\,l\,\delta\varphi,$$

так как в соответствии с рисунком $\frac{3}{2}\,l\,\delta\varphi = \frac{l}{2}\,\delta\varphi_1$ и, следовательно, $\delta\varphi_1 = 3\delta\varphi$.

Подставляя полученные соотношения в уравнение (2.11), имеем

$$\left(\frac{1}{2}P_1 - R_C + \frac{5}{4}P_2 - \frac{3}{4}P_3\right) l\,\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi$ выбирается произвольно, то можно принять $\delta\varphi \neq 0$. Тогда

$$2P_1 - 4R_C + 5P_2 - 3P_3 = 0$$

и

$$R_C = \frac{2P_1 + 5P_2 - 3P_3}{4}.$$

Пример 2.3. При каком соотношении между весами P_1, P_2, P_3 и P_4 грузов A, B, C и D система, изображенная на рис. 2.3, будет находиться в равновесии? Нить невесома и нерастяжима. Трением пренебречь.

Пусть величины s_1, s_2, s_3, s_4 определяют положение грузов A, B, C, D. На основании принципа виртуальных перемещений можно написать условие равновесия

$$P_1 \sin\alpha\,\delta s_1 + P_2\,\delta x_2 + P_3\,\delta x_3 + P_4 \sin\beta\,\delta s_4 = 0.$$

Из условия нерастяжимости нити получаем

$$s_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_4 = \text{const}.$$

Отсюда

$$\delta s_1 + 2\delta x_2 + 2\delta x_3 + \delta s_4 = 0,$$

т. е. четыре величины δs_1, δx_2, δx_3, δs_4 связаны между собой одним уравнением, следовательно, три из них могут принимать независимые друг от друга значения, а четвертая определится из полученного соотношения. Пусть это будет

$$\delta s_4 = -(\delta s_1 + 2\,\delta s_2 + 2\,\delta x_3).$$

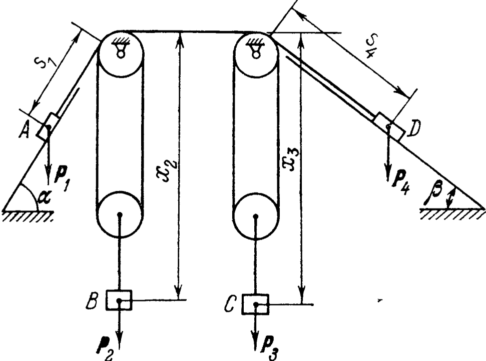


Рис. 2.3

Подставляя это выражение в условие равновесия, получим

$$(P_1 \sin\alpha - P_4 \sin\beta)\delta s_1 + \\ + (P_2 - 2P_4 \sin\beta)\delta x_2 + \\ + (P_3 - 2P_4 \sin\beta)\delta x_3 = 0.$$

Так как δx_2, δs_1, δx_3 независимы между собой и могут принимать различные значения, то полученное равенство может быть выполнено лишь при условии

$$P_1 \sin\alpha - P_4 \sin\beta = 0,$$
$$P_2 - 2P_4 \sin\beta = 0,$$
$$P_3 - 2P_4 \sin\beta = 0,$$

откуда

$$P_2 = P_3, \qquad P_1 \sin\alpha = P_4 \sin\beta.$$

§ 2.2. Условия равновесия в обобщенных координатах

Как было установлено в § 2.1, необходимым и достаточным условием равновесия материальной системы при наличии идеальных связей является выполнение равенств

$$\mathbf{v}_\nu(t_0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \quad \delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0,$$

где $\mathbf{F}_\nu$ — активные силы.

В обобщенных координатах второе выражение условия (2.5) в соответствии с равенством (1.35) имеет вид

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_n\delta q_n = 0. \tag{2.12}$$

Так как для голономной системы вариации обобщенных координат δq_1, δq_2, ..., δq_n могут принимать любые значения независимо друг от друга, то полученное соотношение может быть выполнено, если все обобщенные силы одновременно будут равны нулю, т. е.

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ \ldots,\ Q_n = 0. \tag{2.13}$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием существования положения равновесия голономной системы, подчиненной идеальным связям, является равенство нулю скоростей всех точек системы и равенство нулю всех обобщенных сил.

Пример 2.4. В рассмотренном примере 1.7 (рис. 1.7) обобщенная сила имела выражение

$$Q = cr\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{Pr}{2}\sin\varphi,$$

или

$$Q = r\left[c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right) - P\cos\frac{\varphi}{2}\right]\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Приравнивая это выражение нулю, найдем значение угла φ, при котором система может находиться в равновесии:

$$r\left[c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right) - P\cos\frac{\varphi}{2}\right]\sin\frac{\varphi}{2} = 0,$$

Отсюда $\sin(\varphi/2) = 0$, т. е. $\varphi = \varphi_1 = 0$, или, если $\sin(\varphi/2) \neq 0$,

$$c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right) - P\cos\frac{\varphi}{2} = 0,$$

и окончательно

$$\cos\frac{\varphi_2}{2} = \frac{cl_0}{2rc - P}.$$

Однако это состояние равновесия будет существовать, если

$$\frac{cl_0}{|2rc - P|} < 1,$$

т. е. при $P < c(2r - l_0)$ или $P > c(2r + l_0)$ будет еще одно состояние равновесия (кроме $\varphi_1 = 0$), соответствующее значению

$$\varphi = \varphi_2 = 2\arccos\frac{cl_0}{2rc - P}.$$

Пример 2.5. В примере 1.9 для рассмотренной материальной системы обобщенные силы были равны

$$Q_1 = -c_1(s + \lambda_1) + c_2(a - s - \lambda_1 - 2l\sin\varphi),$$
$$Q_2 = c_2(a - s - \lambda_1 - 2l\sin\varphi)2l\cos\varphi - P_3 l\sin\varphi.$$

При равновесии $s = 0$, $\varphi = \varphi_0$ и, следовательно,

$$-c_1\lambda_1 + c_2(a - \lambda_1 - 2l\sin\varphi_0) = 0,$$
$$c_2(a - \lambda_1 - 2l\sin\varphi_0)2l\cos\varphi_0 - P_3 l\sin\varphi_0 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_1 = \frac{c_2(a - 2l\cos\varphi_0)}{c_1 + c_2},$$

а так как

$$a = \lambda_1 + \lambda_2 + 2l\sin\varphi_0,$$

то

$$\lambda_2 = \frac{c_1(a - 2l\sin\varphi_0)}{c_1 + c_2}.$$

Уравнение для определения φ_0 имеет вид

$$2c_1c_2\cos\varphi_0(a-2l\sin\varphi_0)-(c_1+c_2)P_3\sin\varphi_0=0.$$

Представив это выражение в виде

$$a-2l\sin\varphi_0=P_3\frac{c_1+c_2}{2c_1c_2}\operatorname{tg}\varphi_0,$$

построим на плоскости $\varphi_0 y$ две кривые (рис. 2.4):

$$y=a-2l\sin\varphi_0 \text{ и } y=P_3\frac{c_1+c_2}{2c_1c_2}\operatorname{tg}\varphi_0.$$

Точки пересечения этих кривых и дают искомые значения φ_0. Очевидно, при $0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$ будет только одна точка пересечения, соответствующая единственному положению равновесия системы. Если $P_3=0$, то уравнением для определения φ_0 будет

$$\cos\varphi_0(a-2l\sin\varphi_0)=0.$$

Отсюда $\cos\varphi_0=0$, т. е. $\varphi_0=\pi/2$. Это значит, что существует положение равновесия, когда стержни горизонтальны. Но если $a<2l$, то может быть

$$a-2l\sin\varphi_0=0,$$

т. е.

$$\sin\varphi_0=\frac{a}{2l}.$$

Следовательно, при $a>2l$ возможно (при $P_3=0$) одно положение равновесия $\varphi_0=\pi/2$. При $a<2l$ — два:

$$\varphi_0=\frac{\pi}{2} \text{ и } \varphi_0=\arcsin\frac{a}{2l}.$$

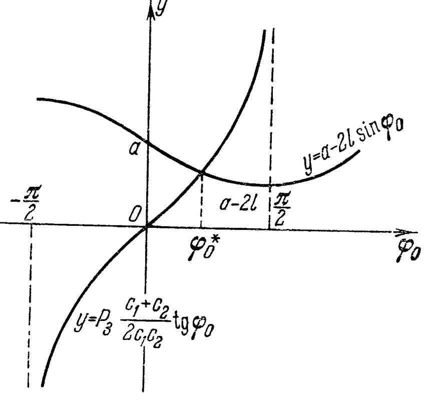


Рис. 2.4

Рассмотрим теперь, как выглядят условия равновесия неголономной системы. Прежде всего заметим, что хотя при введении обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ все уравнения геометрических связей удовлетворяются тождественно, уравнения кинематических связей сохраняются и для системы со склерономными связями и записываются в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\dot{q}_i=0 \quad (j=1, 2, \ldots, m;\ m<n), \tag{2.14}$$

где коэффициенты a_{ji} являются функциями обобщенных координат. Отсюда вытекает, что вариации обобщенных координат δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_n$ теперь не являются независимыми: они связаны соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\delta q_i=0 \quad (j=1, 2, \ldots, m), \tag{2.15}$$

которые являются следствием уравнений (2.14). Поэтому, считая уравнения (2.14) независимыми, видим, что из n вариаций

δq_i независимыми могут быть лишь $n-m$ вариаций. Умножим соотношения (2.15) соответственно на неопределенные множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и сложим полученные выражения вместе с (2.12). В результате получим сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{ji}\right)\delta q_i=0.$$

Выбираем теперь λ_j так, чтобы скобки при зависимых вариациях δq_i обратились в нуль. Тогда обратятся в нуль и скобки при остальных $n-m$ вариациях обобщенных координат в силу независимости этих вариаций. Следовательно, мы получим уравнения

$$Q_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{ji}=0 \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n), \tag{2.16}$$

которые и представляют условия равновесия неголономной системы. Исключая из них множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, получим $n-m$ уравнений для определения n значений $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в положении равновесия. Отсюда непосредственно следует, что состояния равновесия неголономной системы не могут быть изолированными, а всегда образуют многообразие, число измерений которого не меньше m. Это означает, что в пространстве конфигураций неголономной системы положения равновесия — это не изолированные точки, а континуум точек, образующих гиперповерхность в пространстве конфигураций.

Пример 2.6. Найдем положения равновесия неголономной системы, которая представляет частный случай саней Чаплыгина на наклонной плоскости: гладкий шарик массы m прикреплен к невесомому стержню, длина которого l; на другом конце стержня находится полукруглое лезвие (рис. 2.5). Стержень ортогонален плоскости лезвия, которое так же, как и шарик, опирается на наклонную плоскость (α — угол наклона плоскости). Согласно обозначениям на рис. 2.5 уравнение кинематической (неголономной) связи имеет вид $\dot{y}=\dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Отсюда следует, что вариации обобщенных координат δx, δy, $\delta\varphi$ связаны соотношением

$$\delta x\sin\varphi-\delta y\cos\varphi=0.$$

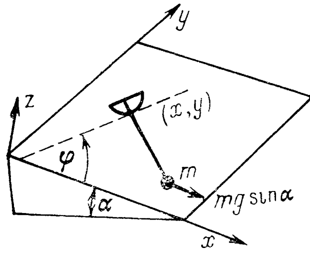


Рис. 2.5

Для нахождения выражений обобщенных сил Q_x, Q_y, Q_φ вычислим виртуальную работу силы тяжести, которая здесь является единственной активной силой:

$$\delta A=mg\sin\alpha\,(\delta x+l\delta\varphi\cos\varphi).$$

Отсюда $Q_x=mg\sin\alpha$, $Q_y=0$, $Q_\varphi=mgl\sin\alpha\cos\varphi$. Составляя уравнения равновесия (2.16), имеем

$$mg\sin\alpha+\lambda\sin\varphi=0, \quad -\lambda\cos\varphi=0, \quad mgl\sin\alpha\cos\varphi=0,$$

или $\cos\varphi=0$. Таким образом, мы получили одно уравнение для определения трех величин x, y, φ в положении равновесия саней Чаплыгина в рассматриваемом случае. Корнями этого уравнения на интервале $0\leqslant\varphi<2\pi$ являются $\varphi_1=\pi/2$, $\varphi_2={}^3/_2\pi$. При этом координаты x, y могут принимать про-

извольные значения. Физический смысл полученного результата вполне понятен: рассматриваемая система может находиться на наклонной плоскости в покое лишь в том положении, при котором стержень расположен вдоль линии наибольшего ската. Здесь возможны два случая: шарик находится ниже лезвия ($\varphi_1 = \pi/2$) или выше лезвия ($\varphi_2 = 3\pi/2$). Как первый, так и второй случай реализуются в любой точке x, y наклонной плоскости.

§ 2.3. Условия равновесия в случае потенциальных сил

Если силы, действующие на точки голономной стационарной системы, потенциальны, то выполняются соотношения

$$X_\nu = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_\nu}, \tag{2.17}$$

где $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N)$ — потенциальная энергия системы материальных точек в поле потенциальных сил.

Подставляя (2.17) в формулу для обобщенной силы и приняв во внимание (1.28), получим

$$Q_i = -\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{2.18}$$

Таким образом, если силы потенциальны, то обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i, равна взятой с обратным знаком производной от потенциальной энергии по обобщенной координате.

Условие (2.13) равновесия голономной системы в этом случае запишется в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.19}$$

Отсюда следует, что в положении равновесия потенциальная энергия голономной системы имеет экстремальное значение.

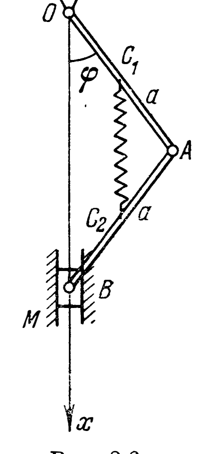


Рис. 2.6

Пример 2.7. Найти обобщенную силу и положение равновесия материальной системы, схема которой представлена на рис. 2.6. В точках O, A и B имеются шарниры. Стержни OA и AB однородные и имеют одинаковую длину a и массу m. Поршень M имеет массу m_1. Середины стержней OA и AB соединены пружиной жесткости c. Длина пружины в ненапряженном состоянии $l_0 < a$. Трением и массой пружины можно пренебречь. Механизм расположен в вертикальной плоскости.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем $q = \varphi$. Потенциальная энергия будет

$$\Pi = -mgx_{C_1} - mgx_{C_2} - m_1 g x_B + \frac{1}{2} c\lambda^2,$$

где

$$x_{C_1} = \frac{a}{2}\cos\varphi, \quad x_{C_2} = \frac{3a}{2}\cos\varphi, \quad x_B = 2a\cos\varphi,$$

а $\lambda = C_1C_2 - l_0$ — удлинение пружины (C_1 и C_2 — точки крепления пружины). Так как $C_1C_2 = a\cos\varphi$, то $\lambda = a\cos\varphi - l_0$. Следовательно,

$$\Pi = -2(m + m_1)ga\cos\varphi + \frac{1}{2}c(a\cos\varphi - l_0)^2.$$

Дифференцируя по φ, получим

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 2(m_1 + m_2)ga\sin\varphi - ac(a\cos\varphi - l_0)\sin\varphi$$

и обобщенная сила будет равна

$$Q = -\frac{d\Pi}{d\varphi} = -2(m + m_1)ga\sin\varphi + ac(a\cos\varphi - l_0)\sin\varphi.$$

При равновесии системы $Q = 0$, т. е.

$$[-2(m + m_1)ga + ac(a\cos\varphi - l_0)]\sin\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что в положении равновесия

$$\sin\varphi = 0.$$

Значит, $\varphi_1 = 0$ является одним из равновесных состояний системы. Но может быть и

$$-2(m + m_1)g + c(a\cos\varphi - l_0) = 0,$$

откуда

$$\cos\varphi_2 = \frac{2(m + m_1)g + cl_0}{ca}.$$

Состояние равновесия, определяемое этим выражением, может существовать, если

$$2(m + m_1)g < c(a - l_0).$$

Таким образом, если

$$2(m + m_1)g > c(a - l_0),$$

то существует одно состояние равновесия

$$\varphi_1 = 0.$$

При $2(m + m_1)g < c(a - l_0)$ существуют два состояния равновесия

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \arccos\frac{2(m + m_1)g + cl_0}{ca}.$$

Пример 2.8. Две материальные точки M_1 и M_2, соединенные между собой жестким стержнем длины l', притягиваются к неподвижной точке O по закону всемирного тяготения. Пренебрегая массой стержня, найти обобщенные силы, принимая, что движение происходит в одной плоскости.

При движении точек в одной плоскости положение каждой из них определяется двумя координатами. По условию расстояние между точками не изменяется, следовательно, независимых координат будет три, т. е. рассматриваемая материальная система имеет три степени свободы. За обобщенные координаты примем $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \psi$ (рис. 2.7). Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r'},$$

где α и β — постоянные величины. Но так как

$$r' = \sqrt{r^2 + l^2 + 2rl\cos(\varphi - \psi)},$$

то

$$\Pi = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl\cos(\varphi - \psi)}}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta[r + l\cos(\varphi - \psi)]}{[r^2 + l^2 + 2rl\cos(\varphi - \psi)]^{3/2}},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{-\beta rl\sin(\varphi - \psi)}{[r^2 + l^2 + 2rl\cos(\varphi - \psi)]^{3/2}},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = \frac{\beta rl\sin(\varphi - \psi)}{[r^2 + l^2 + 2rl\cos(\varphi - \psi)]^{3/2}}.$$

При равновесии системы согласно (2.19) имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = 0.$$

Эти уравнения сводятся к системе двух уравнений

$$\sin(\varphi - \psi) = 0;$$

$$\alpha[r^2 + l^2 + 2rl\cos(\varphi - \psi)]^{3/2} + r^2\beta[r + l\cos(\varphi - \psi)] = 0.$$

Полученная система уравнений имеет лишь одно решение:

$$\varphi = \psi + \pi, \quad r = l\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}},$$

отвечающее положению равновесия системы, изображенной на рис. 2.7. В этом положении притягивающий центр O находится между материальными точками M_1 и M_2.

При равновесии неголономной системы в случае потенциальных сил согласно (2.16) и (2.18) должна удовлетворяться система уравнений

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (2.20)$$

Рис. 2.7

Отсюда следует, что в отличие от голономной системы потенциальная энергия неголономной системы в положении равновесия не принимает экстремальное значение.

Пример 2.9. Потенциальная энергия саней Чаплыгина (рис. 2.5), рассмотренных в примере 2.6, определяется выражением

$$\Pi = -mg\sin\alpha \cdot (x + l\sin\varphi),$$

а вариации δx, δy, $\delta\varphi$ связаны соотношением

$$\delta x\sin\varphi - \delta y\cos\varphi = 0.$$

Составляя выражения (2.20), получаем систему уравнений

$$mg\sin\alpha + \lambda\sin\varphi = 0, \quad -\lambda\cos\varphi = 0, \quad mgl\sin\alpha\cos\varphi = 0,$$

которая, естественно, совпадает с уравнениями равновесия, полученными для саней Чаплыгина в примере 2.6.

§ 2.4. Устойчивость состояний равновесия

Принцип виртуальных перемещений, рассмотренный в предыдущих параграфах, устанавливает необходимые и достаточные условия равновесия материальной системы. Но не каждое состояние равновесия можно реализовать практически. В самом деле, для сферического маятника, рассмотренного в примере 1.8 (рис. 1.6), обобщенные силы равны

$$Q_1 = -Pl \sin \theta, \quad Q_2 = 0.$$

Условием равновесия будет

$$Pl \sin \theta = 0,$$

откуда $\theta = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Практически этому условию соответствуют два положения равновесия: нижнее при $\theta = 0$ и верхнее при $\theta = \pi$. Для положения равновесия при $\theta = 0$ характерно то, что при сообщении маятнику достаточно малого отклонения от этого положения равновесия и достаточно малой скорости он будет совершать движения вблизи состояния равновесия. Для состояния же равновесия при $\theta = \pi$ при сколь угодно малых отклонениях маятника от него и при сколь угодно малой начальной скорости маятник будет удаляться от этого положения равновесия.

Положения равновесия материальной системы, для которых небольшие отклонения от этих положений равновесия и небольшие начальные скорости точек системы не приводят к выходу материальной системы из достаточно малой окрестности положения равновесия, называются *устойчивыми*.

Если же сколь угодно малые отклонения системы от положения равновесия и сколь угодно малые начальные скорости приводят к возрастающему отклонению материальной системы от положения равновесия, то это положение равновесия называется *неустойчивым*.

Может существовать еще и так называемое *безразличное равновесие*, характерное тем, что при выводе системы из этого положения она окажется в новом положении равновесия и не будет стремиться приблизиться к прежнему положению равновесия или удалиться от него. Примером такого положения равновесия может служить положение равновесия тяжелого шара на горизонтальной плоскости.

А. М. Ляпунов дал строгое определение устойчивости состояния равновесия.

Устойчивым состоянием равновесия системы называется такое ее положение, когда при достаточно малом начальном отклонении от него и при достаточно малых скоростях все точки системы, имея сколь угодно малые скорости, будут двигаться так, что

все они не уйдут от своего равновесного положения далее наперед заданного расстояния, как бы оно мало ни было.

Приведем теперь достаточный признак устойчивости положения равновесия материальной системы в потенциальном(консервативном) силовом поле, даваемый *теоремой Лагранжа — Дирихле.*

В теореме Лагранжа — Дирихле дается строгое доказательство того, что для любой материальной системы (в потенциальном силовом поле) минимум потенциальной энергии является признаком устойчивого состояния равновесия. Приведем формулировку теоремы Лагранжа — Дирихле: *если для материальной системы, находящейся в потенциальном силовом поле и подчиненной голономным идеальным стационарным связям, потенциальная энергия в положении равновесия системы имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво* *).

Если заданными силами, действующими на систему с идеальными связями, будут только силы тяжести, то из теоремы Лагранжа — Дирихле следует: *если центр тяжести системы занимает наинизшее положение,* которое является изолированным, *то это положение будет устойчивым положением равновесия* (*принцип Торичелли*).

Если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума, то исследование устойчивости состояния равновесия становится очень сложной задачей.

Приведем формулировку одной из теорем Ляпунова: *если отсутствие минимума потенциальной энергии* П *в исследуемом положении равновесия обнаруживается уже по членам второго порядка* (*или вообще по членам наименьшего порядка*) *в разложении функции* $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ *в ряд Тейлора, то равновесие неустойчиво.*

Пример 2.10. Для механической системы, рассмотренной в примере 1.7, потенциальная энергия может быть выражена формулой

$$\Pi = P(x_{C0} - x_C) + \frac{c}{2}\lambda^2,$$

где x_{C0} — значение координаты x_C при недеформированной пружине, $\lambda = |l - l_0|$ — растяжение пружины. В соответствии с приведенными в примере 1.7 расчетами

$$x_C = \frac{r}{2}\cos\varphi, \quad x_{C0} = \frac{r}{2}\cos\varphi_0, \quad \lambda = \left|2r\cos\frac{\varphi}{2} - 2r\cos\frac{\varphi_0}{2}\right|.$$

Следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2}Pr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) + 2cr^2\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2,$$

где

$$\cos\frac{\varphi_0}{2} = \frac{l_0}{2r} \qquad (l_0 < 2r).$$

*) Эта теорема представляет собой частный случай теоремы А. М. Ляпунова [31, 33, 44].

Так как

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = \frac{1}{2} Pr \sin\varphi - 2cr^2 \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}\right) \sin\frac{\varphi}{2},$$

то получаем условие равновесия

$$\left[(2cr - P)\cos\frac{\varphi}{2} - cl_0\right] \sin\frac{\varphi}{2} = 0,$$

которое, естественно, совпадает с условием равновесия для данной системы, полученным в примере 2.4 из условия $Q = 0$. Там же было установлено, что всегда существует состояние равновесия при $\varphi_1 = 0$, а при

$$P < c(2r - l_0)$$

или

$$P > c(2r + l_0)$$

существует еще одно состояние равновесия:

$$\varphi = \varphi_2 = 2 \arccos \frac{cl_0}{2rc - P}.$$

Выясним характер этих состояний равновесия. Вторая производная от Π по φ равна

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{r}{2}\left[(P - 2cr)\cos\varphi + cl_0 \cos\frac{\varphi}{2}\right].$$

При $\varphi = 0$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{r}{2}(P - 2cr + cl_0).$$

Значит, при $P > 2cr$ величина $cl_0 \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0$ и это состояние равновесия устойчиво, а при $P < c(2r - l_0)$ неустойчиво. Для состояния равновесия

$$\varphi_2 = 2 \arccos \frac{cl_0}{2cr - P},$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{r}{2}\left[(P - 2cr)\left(2\cos^2\frac{\varphi_2}{2} - 1\right) + cl_0 \cos\frac{\varphi_2}{2}\right] = \\ = \frac{r}{2}\,\frac{(2cr + cl_0 - P)(P - 2cr + cl_0)}{P - 2cr}.$$

Если $P < 2cr - cl_0$, то $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0$, т. е. состояние равновесия устойчиво. Если $P > 2cr + cl_0$, то $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0$ и, следовательно, состояние равновесия неустойчиво. Итак, при $P < 2cr - cl_0$ существуют два состояния равновесия: $\varphi_1 = 0$ — неустойчивое и $\varphi_2 = 2 \arccos \frac{cl_0}{2cr - P}$ — устойчивое. При $P > 2cr + cl_0$ существуют также два состояния равновесия: $\varphi_1 = 0$ — устойчивое и $\varphi = \varphi_2$ — неустойчивое. При $c(2r - l_0) < P < c(2r + l_0)$ существует одно устойчивое состояние равновесия $\varphi_1 = 0$.

Пример 2.11. Определить устойчивость положений равновесия в примере, схема которого изображена на рис. 2.6 (§ 2.3).

Дифференцируя выражение

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 2\left(m + m_1\right) ga \sin\varphi - ac\left(a\cos\varphi - l_0\right)\sin\varphi$$

по φ, получим

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = 2\left(m + m_1\right) ga\cos\varphi + ca^2\sin^2\varphi - ac\left(a\cos\varphi - l_0\right)\cos\varphi =$$

$$= a\left[2\left(m + m_1\right) g + cl_0\right]\cos\varphi + ca^2\left(1 - 2\cos^2\varphi\right).$$

При $\varphi = 0$ имеем

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = a\left[2\left(m + m_1\right) g - c\left(a - l_0\right)\right].$$

При

$$2(m + m_1)g > c(a - l_0)$$

будет

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0,$$

т. е. потенциальная энергия имеет минимум и состояние равновесия $\varphi = 0$ устойчиво. При

$$2(m + m_1)g < c(a - l_0)$$

получаем

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0,$$

и, следовательно, состояние равновесия неустойчиво. При

$$\varphi = \varphi_2 = \arccos\frac{2\left(m + m_1\right) g + cl_0}{ca}$$

имеем

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{\left[2\left(m + m_1\right) g + c\left(a + l_0\right)\right]\left[c\left(a - l_0\right) - 2\left(m + m_1\right) g\right]}{c}.$$

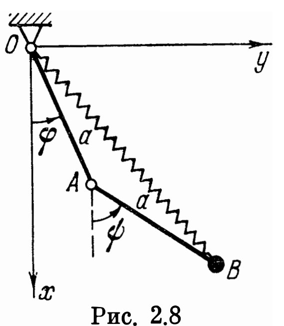


Рис. 2.8

Если

$$2(m + m_1)g < c(a - l_0),$$

то $\dfrac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0$ и состояние равновесия $\varphi = \varphi_2$ устойчиво. Значит, при

$$2(m + m_1)g > c(a - l_0)$$

существует одно устойчивое состояние равновесия $\varphi = 0$. При

$$2(m + m_1)g < c(a - l_0)$$

существуют два состояния равновесия: неустойчивое $\varphi = 0$ и устойчивое $\varphi = \varphi_2$.

Пример 2.12. Невесомый стержень OA длиною a может свободно вращаться вокруг точки O. К концу A стержня шарнирно прикреплен невесомый стержень AB длиною a, на другом конце которого закреплен груз B массы m. Точка O и точка B соединены между собой пружиной жесткости c. Масса пружины пренебрежимо мала, длина пружины в ненапряженном состоянии равна a. Найти положения равновесия (рис. 2.8), считая, что система расположена в вертикальной плоскости xy.

Пусть обобщенными координатами будут

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \psi.$$

Выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = -mgx_B + \frac{1}{2} c\lambda^2,$$

здесь

$$x_B = a(\cos\varphi + \cos\psi),$$

$$\lambda = 2a\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - a;$$

значит, потенциальная энергия

$$\Pi = -mga(\cos\varphi + \cos\psi) + \frac{1}{2} ca^2 \left(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1\right)^2.$$

Далее вычисляем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mga\sin\varphi + ca^2\left(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1\right)\sin\frac{\psi - \varphi}{2},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = mga\sin\psi - ca^2\left(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1\right)\sin\frac{\psi - \varphi}{2}.$$

Углы φ и ψ в положении равновесия определяются из уравнений

$$mg\sin\varphi + ca\left(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1\right)\sin\frac{\psi - \varphi}{2} = 0,$$

$$mg\sin\psi - ca\left(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1\right)\sin\frac{\psi - \varphi}{2} = 0. \qquad (2.21)$$

Очевидно, что в положении равновесия

$$\varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = 0$$

и

$$\varphi_2 = \pi, \quad \psi_2 = \pi.$$

Складывая между собой оба уравнения (2.21), получим положение равновесия, для которого

$$\sin\varphi + \sin\psi = 0,$$

т. е. когда

$$\psi = -\varphi.$$

Вычислим теперь вторые производные от Π:

$$A = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mga\cos\varphi + ca^2\sin^2\frac{\psi - \varphi}{2} - \frac{ca^2}{2}\left(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\psi - \varphi}{2},$$

$$B = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi\,\partial \psi} = \frac{ca^2}{2}\cos\frac{\psi - \varphi}{2}\left(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1\right) - ca^2\sin^2\frac{\psi - \varphi}{2},$$

$$C = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \psi^2} = mga\cos\psi + ca^2\sin^2\frac{\psi - \varphi}{2} - \frac{ca^2}{2}\left(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\psi - \varphi}{2}.$$

В положении равновесия $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$

$$A = mga - \frac{ca^2}{2}, \quad B = \frac{ca^2}{2}, \quad C = mga - \frac{ca^2}{2}$$

и

$$\Delta = AC - B^2 = \left(mga - \frac{ca^2}{2}\right)^2 - \frac{c_2a^4}{4} = mga\left(mga - ca^2\right).$$

При $mg > ca$ $\Delta > 0$, а так как при этом $A > 0$, то потенциальная энергия имеет минимум и положение равновесия устойчиво. При $\Delta < 0$, т. е. при $mg < ca$, потенциальная энергия экстремума не имеет.

В положении равновесия ($\varphi_2 = \pi$, $\psi_2 = \pi$)

$$A = -mga - \frac{ca^2}{2} < 0, \quad B = \frac{ca^2}{2}, \quad C = -mga - \frac{ca^2}{2},$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(mga + \frac{ca^2}{2}\right)^2 - \frac{c^2a^4}{4} = mga\left(mga + c^2a^2\right) > 0.$$

Поскольку $A < 0$, то состояние равновесия $\varphi_2 = \pi$, $\psi_2 = \pi$ неустойчиво.

Рассмотрим теперь случай, когда $\psi_3 = -\varphi_3 \neq 0$. Уравнения для определения ψ_3 и φ_3 получим из уравнений

$$[mg - ca(2\cos\varphi_3 - 1)]\sin\varphi_3 = 0,$$
$$[mg - ca(2\cos\psi_3 - 1)]\sin\psi_3 = 0.$$

Считая, что $\sin\varphi_3 \neq 0$ и $\sin\psi_3 \neq 0$, имеем

$$mg - ca(2\cos\varphi_3 - 1) = 0,$$

откуда

$$\cos\varphi_3 = \cos\psi_3 = \frac{mg + ca}{2ca}.$$

Это положение равновесия существует, если $mg + ca < 2ca$, т. е. $mg < ca$. Далее находим

$$A = \left(mga + \frac{ca^2}{2}\right)\cos\varphi_3 + ca^2\left(1 - 2\cos^2\varphi_3\right),$$

$$B = -ca^2\left(1 - 2\cos^2\varphi_3\right) - \frac{ca^2}{2}\cos\varphi_3,$$

$$C = \left(mga + \frac{ca^2}{2}\right)\cos\varphi_3 + ca^2\left(1 - 2\cos^2\varphi_3\right),$$

$$\Delta = AC - B^2 = 2mgca^3\cos\varphi_3\left(1 - \cos^2\varphi_3\right).$$

Так как решение $\varphi = \varphi_3$ существует при $ca > mg$, то $\Delta > 0$, но так как при этом

$$A = \frac{mga}{2}\cos\varphi_3 + ca^2\left(1 - \cos^2\varphi_3\right) > 0,$$

Рис. 2.9

то положение равновесия $\varphi = \mp\varphi_3$, $\psi = \pm\psi_3$ при $ca > mg$ устойчиво. На рис. 2.9 показаны эти состояния равновесия.

В § 2.2 было показано, что состояния равновесия неголономной системы в общем случае образуют многообразие, число измерений которого не меньше числа m уравнений неголономных связей. В предыдущем параграфе мы видели, что при равновесии потенциальная энергия неголономной системы не имеет ни экс-

тремума, ни минимума. Здесь мы сталкиваемся с особенностью, которая приводит к постановке задачи об устойчивости равновесия неголономной системы, несколько отличной от обычной постановки. Наличие многообразия состояний равновесия указывает на то, что не имеет смысла говорить об устойчивости изолированного состояния равновесия неголономной системы, ибо неголономная система не обладает изолированными состояниями равновесия: целесообразно ставить вопрос об устойчивости многообразия в целом. В связи с этим изменяется и понятие устойчивости равновесия неголономной системы.

Состояние равновесия неголономной системы называется асимптотически устойчивым, если при достаточно малом отклонении от положения равновесия неголономная система вновь приходит в положение равновесия, которое может, вообще говоря, и не совпадать с первоначальным положением равновесия. На геометрическом языке это означает, что в пространстве конфигураций неголономной системы существует гиперповерхность состояний равновесия, и под устойчивостью точек, образующих эту гиперповерхность, понимается устойчивость по отношению к малым отклонениям от этой гиперповерхности. Более подробные сведения по этому вопросу читатель найдет в книге [37].

§ 2.5. Принцип Даламбера

В 1743 г. французский ученый Ж. Даламбер опубликовал мемуар, положенный в основу своего знаменитого сочинения «Динамика». В этой работе он сформулировал утверждение, которое вошло в историю механики под названием «принцип Даламбера», как универсальный прием решения задач динамики системы со связями. Согласно принципу Даламбера все законы движения системы материальных точек могут быть сведены к законам равновесия. В самом деле, в состоянии равновесия, когда скорости всех точек системы $\mathbf{v}_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$, выполняются уравнения (2.4)

$$\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.22}$$

где $\mathbf{F}_\nu$ — результирующая активных сил, действующих на ν-ю точку системы, а $\mathbf{R}_\nu$ — результирующая реакций связей. Смысл уравнений равновесия (2.22) заключается в том, что в статике (т. е. при равновесии системы) активная сила $\mathbf{F}_\nu$ уравновешивается реакцией связей $\mathbf{R}_\nu$.

Обратимся теперь к динамике. При движении той же системы материальных точек со связями согласно принципу освобождаемости для каждой точки справедлив второй закон Ньютона

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.23}$$

Если ввести силу $\mathbf{P}_\nu = \mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu$, получившую название «потерянная сила», то второй закон Ньютона записывается в виде

$$\mathbf{P}_\nu + \mathbf{R}_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.24}$$

Эти уравнения движения по своей структуре полностью совпадают с уравнениями равновесия (2.22), поэтому можно утверждать, что уравнения движения — это те же уравнения равновесия, но составленные не для активных сил $\mathbf{F}_\nu$, а для потерянных сил $\mathbf{P}_\nu$. Другими словами, если в любых соотношениях, справедливых в статике, активные силы заменить потерянными силами, мы получим соотношения, справедливые в динамике.

Таким образом, принцип Даламбера перебрасывает «мостик» между статикой и динамикой. Потерянную силу $\mathbf{P}_\nu$ можно представить в виде суммы двух сил: активной силы $\mathbf{F}_\nu$ и так называемой *силы инерции* $\mathbf{F}_\nu^*$, равной $-m_\nu \mathbf{w}_\nu$ по определению. Тогда уравнение движения (2.24) записывается в виде уравнения равновесия трех сил

$$\mathbf{F}_\nu + \mathbf{F}_\nu^* + \mathbf{R}_\nu = 0. \tag{2.25}$$

Наглядное представление об идее принципа Даламбера дает рис. 2.10, *а*, где изображены векторы $\mathbf{F}_\nu$, $\mathbf{R}_\nu$ и $m_\nu \mathbf{w}_\nu$, связанные

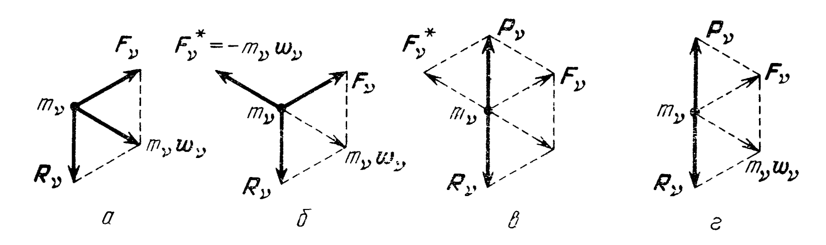


Рис. 2.10

вторым законом Ньютона. На рис. 2.10, *б* изображены три вектора $\mathbf{F}_\nu$, $\mathbf{R}_\nu$ и $\mathbf{F}_\nu^* = -m_\nu \mathbf{w}_\nu$, связанные соотношением (2.25), выражающим равновесие сил. На рис. 2.10, *в* изображено равновесие двух сил: $\mathbf{P}_\nu$ и $\mathbf{R}_\nu$ в соответствии с уравнением (2.24). Наконец, на рис. 2.10, *г* разъясняется, почему сила $\mathbf{P}_\nu$ названа потерянной: разлагая активную силу $\mathbf{F}_\nu$ на две составляющие: $\mathbf{P}_\nu$ и $m_\nu \mathbf{w}_\nu$, мы видим, что составляющая $\mathbf{P}_\nu$ уравновешивается силой $\mathbf{R}_\nu$ и для движения оказывается как бы потерянной.

Принцип Даламбера позволяет легко составлять уравнения движения в задачах, где уравнения равновесия очевидны, как это показывает приводимый ниже пример.

Пример 2.13. Рассмотрим три груза с массами m_1, m_2, m_3, подвешенных на нерастяжимых нитях, которые перекинуты через невесомые блоки так, как это показано на рис. 2.11. Эта система будет, очевидно, в равновесии, если $m_1 = m_2 + m_3$, $m_2 = m_3$. При невыполнении этих равенств грузы будут двигаться с ускорениями, которые и нужно найти. Нам известны уравнения статики, которые в этой задаче имеют вид

$$m_1\mathbf{g} = m_2\mathbf{g} + m_3\mathbf{g}; \qquad m_2\mathbf{g} = m_3\mathbf{g}. \tag{2.26}$$

Согласно принципу Даламбера мы получим из (2.26) уравнения движения, если активные силы $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{g}$, $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{g}$, $\mathbf{F}_3 = m_3\mathbf{g}$ в уравнениях (2.26) заменим на потерянные силы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$. Пусть груз m_1 будет двигаться с ускорением $\mathbf{w}_1$, направленным вниз (рис. 2.11). Тогда центр блока будет перемещаться вверх с ускорением $\mathbf{w}_1'$, равным по величине ускорению $\mathbf{w}_1$, т. е. $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{w}_1'$. Предположим далее, что груз m_2 при этом движется вниз с относительным ускорением $\mathbf{w}_2$, т. е. в системе координат, связанной с центром подвижного блока. Тогда груз m_3 будет перемещаться в этой системе отсчета вверх с ускорением $\mathbf{w}_2'$, равным по величине ускорению $\mathbf{w}_2$ вследствие нерастяжимости нити. Следовательно, $\mathbf{P}_1 = m_1\mathbf{g} - m_3\mathbf{w}_1$, $\mathbf{P}_2 = m_2\mathbf{g} - m_2\left(\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_2'\right)$, $\mathbf{P}_3 = m_3\mathbf{g} - m_3\left(\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1'\right)$. Подставляя эти выражения потерянных сил в уравнения (2.26), получим систему векторных уравнений. В проекции на вертикальное направление эти уравнения дают систему двух уравнений для определения неизвестных w_1 и w_2:

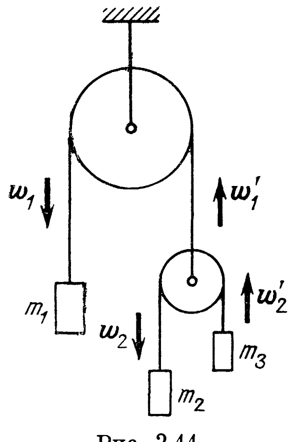


Рис. 2.11

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,w_1 + (m_3 - m_2)\,w_2 = (m_1 - m_2 - m_3)\,g,$$
$$(m_2 - m_3)\,w_1 - (m_2 + m_3)\,w_2 = (m_3 - m_2)\,g.$$

Отсюда находим

$$w_1 = [m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3]\cdot\Delta, \qquad w_2 = 2m_1(m_2 - m_3)\cdot\Delta,$$
$$\Delta = g[m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3]^{-1}. \tag{2.27}$$

Из (2.27) следует, в частности, что при выполнении условия $m_1 = 2m_2 = 2m_3$ грузы будут оставаться в покое или могут двигаться с постоянными скоростями, если эти скорости были им сообщены в начальный момент времени.

§ 2.6. Общее уравнение динамики

При составлении уравнений движения системы материальных точек, опираясь на второй закон Ньютона, мы получаем уравнения (2.23), в которых содержатся неизвестные величины $\mathbf{R}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) — реакции связей, ограничивающих движение системы. Поскольку мы интересуемся только движением систе-

мы, реакции связей $\mathbf{R}_\nu$ оказываются лишь вспомогательными величинами, которые мы вынуждены ввести и которые затем следует исключить.

Вопрос об исключении неизвестных реакций связей встречается уже в статике при нахождении условий равновесия системы материальных точек. В § 2.1 было показано, что общим принципом, позволяющим получить условие равновесия системы материальных точек, не содержащее реакций связей $\mathbf{R}_\nu$, является принцип виртуальных перемещений. Согласно этому принципу вопрос об исключении реакций связей $\mathbf{R}_\nu$ полностью решается для систем с идеальными связями.

Возвращаясь к динамике, естественно попытаться решить задачу об исключении из уравнений движения реакций связей сначала также для систем с идеальными связями. Воспользуемся принципом Даламбера, который позволяет довольно просто перейти от статики к динамике, и заменим в уравнении (2.5), выражающем принцип виртуальных перемещений, активные силы $\mathbf{F}_\nu$ потерянными силами $\mathbf{P}_\nu = \mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu$. В результате приходим к уравнению

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu)\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0. \qquad (2.28)$$

Полученный результат можно сформулировать так: *в каждый момент движения материальной системы, подчиненной идеальным связям, работа всех активных сил и сил инерции на виртуальных перемещениях точек материальной системы равна нулю.*

Уравнение (2.28) и представляет собой *общее уравнение динамики*, или *уравнение Даламбера — Лагранжа*. Если X_ν, Y_ν, Z_ν — проекции силы $\mathbf{F}_\nu$ на оси декартовой системы координат, а $\ddot{x}_\nu$, $\ddot{y}_\nu$, $\ddot{z}_\nu$ — проекции ускорения ν-й точки на эти же оси, то уравнение (2.28) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} [(X_\nu - m_\nu \ddot{x}_\nu)\,\delta x_\nu + (Y_\nu - m_\nu \ddot{y}_\nu)\,\delta y_\nu + (Z_\nu - m_\nu \ddot{z}_\nu)\,\delta z_\nu] = 0. \qquad (2.29)$$

Пример 2.14. Неоднородный блок с массой m и радиусом R может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его геометрический центр. Центр тяжести C блока находится на расстоянии a от оси вращения. Через блок перекинута нерастяжимая нить, массой которой можно пренебречь. Нить по блоку не проскальзывает. Массы грузов A и B, подвешенных к концам нити, равны m_1 и m_2 $(m_2 > m_1)$. Определить ускорение груза B.

Предположим, что груз B имеет ускорение $\mathbf{w}$, направленное вниз (рис. 2.12). В соответствии с условием (2.29) имеем

$$(m_1 g + m_1 w)\,\delta x_1 + (m_2 g - m_2 w)\,\delta x_2 + \sum_{\nu=1}^{N} \left[(m_\nu g + F^*_{\nu x})\,\delta x_\nu + F^*_{\nu y}\delta y_\nu\right] = 0,$$

где последняя сумма относится к точкам диска, а

$$\mathbf{F}_\nu^* = F_{\nu x}^*\mathbf{i} + F_{\nu y}^*\mathbf{j} = -m_\nu (w_{\nu x}\mathbf{i} + w_{\nu y}\mathbf{j})$$

— сила инерции ν-й точки диска. Так как ускорение ν-й точки диска равно [11, 16]

$$\mathbf{w}_\nu = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_\nu - \omega^2\mathbf{r}_\nu,$$

где ε — угловое ускорение, ω — угловая скорость диска, $\mathbf{r}_\nu$ — радиус-вектор ν-й точки диска, то

$$w_{\nu x} = -\varepsilon_z y_\nu - \omega^2 x_\nu = \varepsilon y_\nu - \omega^2 x_\nu,$$

$$w_{\nu y} = \varepsilon_z x_\nu - \omega^2 y_\nu = -\varepsilon x_\nu - \omega^2 y_\nu,$$

где $\varepsilon = |\varepsilon_z|$, и следовательно,

$$F_{\nu x}^* = -m_\nu w_{\nu x} = -m_\nu y_\nu \varepsilon + m_\nu \omega^2 x_\nu,$$

$$F_{\nu y}^* = -m_\nu w_{\nu y} = m_\nu x_\nu \varepsilon + m_\nu \omega^2 y_\nu.$$

Таким образом, имеем

$$(m_1 g + m_1 w)\,\delta x_1 + (m_2 g - m_2 w)\,\delta x_2 + \sum_{\nu=1}^{N} \left[\left(m_\nu g - m_\nu y_\nu \varepsilon + m_\nu \omega^2 x_\nu\right)\delta x_\nu + \right.$$
$$\left. + \left(m_\nu x_\nu \varepsilon + m_\nu y_\nu \omega^2\right)\delta y_\nu\right] = 0.$$

Координаты ν-й точки диска равны (рис. 2.13) $x_\nu = r_\nu \cos(\varphi + \alpha_\nu)$, $y_\nu =$

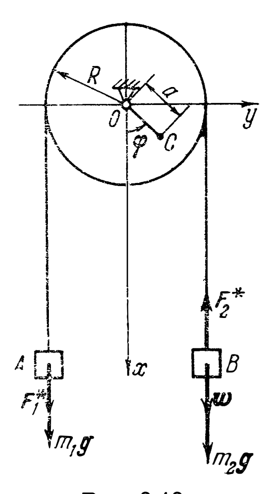


Рис. 2.12

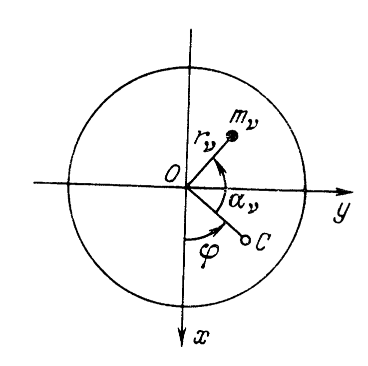


Рис. 2.13

$= r_\nu \sin(\varphi + \alpha_\nu)$, где α_ν — постоянный угол между радиусом-вектором ν-й точки и направлением отрезка OC. Значит,

$$\delta x_\nu = -r_\nu \sin(\varphi + \alpha_\nu)\,\delta\varphi = -y_\nu \delta\varphi,$$

$$\delta y_\nu = r_\nu \cos(\varphi + \alpha_\nu)\,\delta\varphi = x_\nu \delta\varphi.$$

Тогда

$$(m_1 g + m_1 w)\,\delta x_1 + (m_2 g - m_2 w)\,\delta x_2 + \sum_{\nu=1}^{N}\left[-m_\nu y_\nu g + m_\nu \varepsilon\left(y_\nu^2 + x_\nu^2\right)\right]\delta\varphi = 0,$$

или

$$(m_1 g + m_1 w)\delta x_1 + (m_2 g - m_2 w)\delta x_2 + (-m y_C g + \varepsilon I_0)\delta\varphi = 0,$$

где I_0 — момент инерции блока относительно центра O. Так как нить нерастяжима и не проскальзывает, то

$$\delta x_1 = -\delta x_2, \quad \delta\varphi = -\frac{\delta x_2}{R}$$

и, следовательно,

$$\left(-m_1 g - m_1 w + m_2 g - m_2 w + \frac{m y_C}{R} g - \frac{\varepsilon I_0}{R}\right)\delta x_2 = 0.$$

Принимая $\delta x_2 \neq 0$, получим

$$\left(m_2 - m_1 + m\frac{y_C}{R}\right) g - (m_1 + m_2) w - \frac{\varepsilon I_0}{R} = 0.$$

Учитывая, что

$$\varepsilon = \frac{w}{R}, \quad y_C = a \sin\varphi,$$

найдем

$$w = \frac{m_2 - m_1 + m\frac{a}{R}\sin\varphi}{m_1 + m_2 + I_0/R^2} g.$$

Если блок будет однородным, то $a = 0$ и

$$w = \frac{2(m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2) + m} g,$$

так как $I_0 = mR^2/2$. В этом случае $w > 0$.

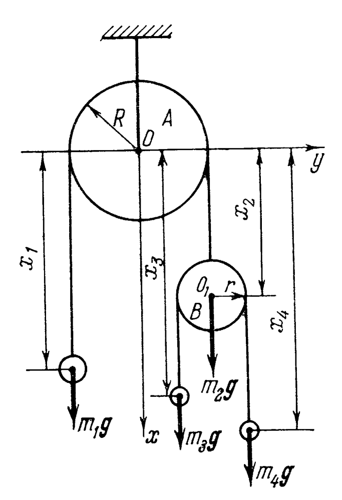


Рис. 2.14

Пример 2.15. Через блок A массы m и радиуса R перекинута невесомая нерастяжимая нить. На одном конце этой нити привязан груз массы m_1, к другому концу прикреплен блок B радиуса r и массы m_2. Через блок B также перекинута невесомая и нерастяжимая нить, на концах которой прикреплены грузы массы m_3 и m_4 (рис. 2.14). Ось блока A неподвижна. Нити по блокам не проскальзывают. Определить ускорение грузов, считая блоки A и B однородными.

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. В соответствии с выражением (2.99) можно записать

$$(m_1 g - m_1 w_{1x})\delta x_1 + (m_2 g - m_2 w_{2x})\delta x_2 + (m_3 g - m_3 w_{3x})\delta x_3 + \\ + (m_4 g - m_4 w_{4x})\delta x_4 - I_0 \varepsilon_z \delta\varphi - I_{01}\varepsilon_{2z}\delta\varphi_1 = 0,$$

где I_0 и I_{01} — моменты инерции блоков A и B относительно их осей вращения, а ε_z и ε_{2z} — их угловые ускорения. Составим уравнения связей:

$$x_1 + x_2 + \pi R = l_1,$$
$$x_3 + x_4 - 2x_2 + \pi r = l_2,$$

где l_1 и l_2 — длины нитей. Из этих уравнений следует, что

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0,$$
$$\delta x_3 + \delta x_4 - 2\delta x_2 = 0$$

и

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0, \quad \ddot{x}_3 + \ddot{x}_4 - 2\ddot{x}_2 = 0,$$

т. е.

$$w_{1x} + w_{2x} = 0,$$
$$w_{3x} + w_{4x} - 2w_{2x} = 0.$$

Из этих выражений можно найти

$$\delta x_2 = -\delta x_1, \quad \delta x_4 = -\delta x_3 - 2\delta x_1,$$
$$w_{2x} = -w_{1x}, \quad w_{4x} = -w_{3x} - 2w_{1x}.$$

Кроме того, имеем

$$\varepsilon_z = \frac{w_{1x}}{R}, \quad \varepsilon_{2z} = \frac{w_{3x}}{r}, \quad \delta\varphi = \frac{\delta x_1}{R}, \quad \delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{r},$$
$$I_0 = \frac{mR^2}{2}, \quad I_{01} = \frac{m_2 r^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\left[(m_1 - m_2 - 2m_4)\,g - \left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \frac{m}{2}\right) w_{1x} - 2m_4 w_{3x}\right]\delta x_1 + \\ + \left[(m_3 - m_4)\,g - 2m_4 w_{1x} - \left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) w_{3x}\right]\delta x_3 = 0,$$

откуда

$$\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \frac{m}{2}\right) w_{1x} + 2m_4 w_{3x} = (m_4 - m_2 - 2m)\,g,$$
$$2m_4 w_{1x} + \left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) w_{3x} = (m_3 - m_4)\,g.$$

Решая эти уравнения, получим

$$w_{1x} = \frac{(m_1 - m_2 - 2m_4)\left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) - 2m_4(m_3 - m_4)}{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \frac{m_2}{2}\right)\left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) - 4m_4^2}\,g,$$

$$w_{3x} = \frac{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \frac{m_2}{2}\right)(m_3 - m_4) - 2m_4(m_1 - m_2 - 2m_4)}{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \frac{m_2}{2}\right)\left(m_2 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) - 4m_4^2}\,g.$$

Так как $w_{2x} = -w_{1x}$ и $w_{4x} = -w_{3x} - 2w_{1x}$, то окончательно

$$w_{2x} = -\frac{(m_1 - m_2 - 2m_4)\left(m_2 + m_3 + \frac{m_2}{2}\right) - 2m_4(m_3 - m_4)}{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \frac{m_2}{2}\right)\left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) - 4m_4^2}\,g,$$

$$w_{4x} = -\frac{(m_3 - m_4)\left(m_1 + m_2 + \frac{m_2}{2}\right) + 2(m_1 - m_2 - 2m_4)\left(m_3 + \frac{m_2}{2}\right)}{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \frac{m}{2}\right)\left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) - 4m_4^2}\,g.$$

Если числитель в выражении w_{1x} равен нулю, т. е.

$$(m_1 - m_2 - 2m_4)\left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) - 2m_4(m_3 - m_4) = 0,$$

то это значит, что масса m_4 или движется с постоянной скоростью, или находится в покое. Величина m_1 при этом равна

$$m_1 = m_2 + 2m_4 + \frac{2m_4(m_3 - m_4)}{m_3 + m_4 + m_2/2}.$$

Глава 3

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 3.1. Выражения кинетической и потенциальной энергии системы в обобщенных координатах. Гироскопические и диссипативные силы

При составлении уравнений движения в обобщенных координатах обычно приходится пользоваться выражениями кинетической и потенциальной энергий системы.

Выразим кинетическую энергию через обобщенные координаты и скорости в общем случае. Для этого сначала нужно радиусы-векторы $\mathbf{r}_\nu$ точек материальной системы определить как функции обобщенных координат, т. е. получить зависимости

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.1}$$

Затем скорости точек материальной системы определяются по формулам

$$\mathbf{v}_\nu = \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.2}$$

Подставляя эти скорости (3.2) в выражение для кинетической энергии, получим

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_{is}\dot{q}_i\dot{q}_s + \sum_{i=1}^{n} B_i\dot{q}_i + T_0, \tag{3.3}$$

где

$$A_{is} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_s}\right) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}\right) \tag{3.4}$$

(очевидно, что $A_{is} = A_{si}$),

$$B_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial t} + \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial y_\nu}{\partial t} + \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial z_\nu}{\partial t}\right), \tag{3.5}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{3.6}$$

Таким образом, кинетическая энергия нестационарной (реономной) голономной материальной системы может быть представлена как сумма трех частей, T_2, T_1 и T_0, т. е.

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{3.7}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_{is}\dot{q}_i\dot{q}_s \tag{3.8}$$

— однородный многочлен второй степени от обобщенных скоростей,

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} B_i\dot{q}_i \tag{3.9}$$

— многочлен первой степени от обобщенных скоростей,

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$$

от обобщенных скоростей не зависит.

Для стационарных (склерономных) связей, для которых

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \equiv 0,$$

кинетическая энергия будет однородной функцией второй степени относительно обобщенных скоростей, т. е.

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_{is}\dot{q}_i\dot{q}_s. \tag{3.10}$$

Пример 3.1. Определить кинетическую энергию сферического маятника (рис. 1.6). Груз имеет массу, равную m, длина маятника l.

Рассматриваемая система стационарна. За обобщенные координаты примем $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$. Тогда декартовыми координатами, определяющими положение маятника, будут

$$x = l\sin\theta\cos\varphi, \quad y = l\sin\theta\sin\varphi, \quad z = l\cos\theta.$$

Для определения кинетической энергии по формуле (3.10) следует сначала найти коэффициенты A_{is}. В соответствии с формулой (3.4) имеем

$$A_{11} = m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right] = ml^2,$$

$$A_{12} = m\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) = 0,$$

$$A_{22} = m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right] = ml^2\sin^2\theta.$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2}\, ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta).$$

Выяснив, что кинетическая энергия нестационарной материальной системы выражается формулой (3.7), определим, как связано изменение кинетической энергии с характером сил, действующих на систему. Так как кинетическая энергия является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, т. е. $T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$, то

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\dot{q}_i) + \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t},$$

но так как согласно формуле (3.7) $T = T_2 + T_1 + T_0$, то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях *) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = T_1.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1.$$

---

*) Напомним, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *однородной степени m*, если при замене аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$ выполняется соотношение

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Продифференцировав это соотношение по t, получим $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial (tx_i)} x_i = mt^{m-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Написанные соотношения должны выполняться для любых значений $t \neq 0$ и, в частности, для $t = 1$. При $t = 1$ второе соотношение имеет вид $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = mf$, отображающий содержание теоремы Эйлера об однородных функциях: сумма $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$ равна функции f, умноженной на степень m однородности функции f.

Если теперь учесть результаты § 3.2, то согласно уравнениям (3.21) для $\frac{dT}{dt}$ получим

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i + \frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) + \frac{\partial T}{\partial t},$$

где Q_i — обобщенные силы. На основании формулы (3.7) можем записать

$$2T_2 + T_1 = 2T - (T_1 + 2T_0);$$

тогда

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i + \frac{d}{dt}(2T) - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial T}{\partial t}$$

или

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Полученная формула определяет изменение кинетической энергии материальной системы при любом ее движении.

Рассмотрим случай стационарных связей. Для них $T = T_2$, т. е.

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i.$$

Рассмотрим частные случаи сил, являющихся линейными и однородными функциями обобщенных скоростей, т. е.

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\dot{q}_j.$$

Если $B_{ij} = \gamma_{ij}$, где

$$\gamma_{ij} = -\gamma_{ji} \text{ и } \gamma_{jj} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

то обобщенные силы

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\dot{q}_j$$

называются *гироскопическими*. Покажем, что эти силы не вызывают изменения кинетической энергии*). Так как

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

*) Подробнее о гироскопических силах см. в монографии [32].

то можно записать

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}\dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (\gamma_{ij} + \gamma_{ji})\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

и, следовательно, в силу условий, наложенных на коэффициенты γ_{ij} $(\gamma_{ii} = 0,\ \gamma_{ij} = -\gamma_{ji})$,

$$\frac{dT}{dt} = 0.$$

Это значит, что работа гироскопических сил на действительном перемещении системы равна нулю.

Пусть теперь

$$B_{ij} = -\beta_{ij},$$

где

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}.$$

Тогда

$$Q_i = -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\dot{q}_j$$

и

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

Если квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j > 0,$$

то

$$\frac{dT}{dt} < 0,$$

т. е. кинетическая энергия убывает. Силы

$$Q_i = -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\dot{q}_j$$

в этом случае называются *диссипативными*.

Функция $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$, которая является положительно определенной квадратичной формой обобщенных скоростей, называется *функцией диссипации Релея*. Система, для которой функция Релея Φ содержит все обобщенные скорости, называется системой с полной диссипацией.

В § 2.3 было показано, что если силы, действующие на систему материальных точек, потенциальны, то обобщенные силы Q_i определяются формулами (2.18), где потенциальная энергия Π системы зависит от обобщенных координат q_1, q_2, ..., q_n и, вообще говоря, от времени t.

Предположим, что с каждой точкой реального трехмерного пространства связан вектор, изображающий силу, которая действовала бы на находящуюся в этом месте материальную точку. Таким образом, мы получаем векторное поле, которое называется *силовым полем*. Силовое поле называется *стационарным*, если рассматриваемые силы не зависят явно от времени. В противном случае силовое поле называется *нестационарным*. Рассмотрим стационарное силовое поле и вычислим работу сил этого поля от точки M_0 до точки M_1 вдоль некоторого пути. В результате получим $A_{01} = \int\limits_{M_0}^{M} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. В общем случае эта работа будет зависеть как от положения точек M_0 и M_1, так и от пути интегрирования. Если эта работа не зависит от пути интегрирования, то силовое поле называется *потенциальным*. Тогда, зафиксировав положение точки M_0, нетрудно видеть, что работа сил потенциального поля является вполне определенной функцией координат x, y, z точки M. Эта функция, называемая *потенциальной энергией*, определяется формулой

$$\Pi(x, y, z) = -\int\limits_{M_0}^{M} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int\limits_{M_0}^{M} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz), \quad (3.11)$$

где путь интегрирования может быть выбран произвольным. Переходя в (3.11) к обобщенным координатам, получаем потенциальную энергию как функцию обобщенных координат.

Пример 3.2. Найдем потенциальную энергию системы в поле силы тяжести, рассмотренную в примере 2.3 и изображенную на рис. 2.3. Переменные s_1, x_2, x_3, s_4, определяющие положения грузов A, B, C, D, связаны условием нерастяжимости нити

$$s_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_4 = \text{const}.$$

Поэтому в качестве трех обобщенных координат можно выбрать, например, s_1, x_2, x_3. В этом случае согласно (3.11) выражение потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = -\int\limits_{M_0}^{M} [P_1\,ds_1 \sin\alpha + P_2\,dx_2 + P_3\,dx_3 - P_4 \sin\beta\,(ds_1 + dx_2 + 2dx_3)] =$$

$$= -\left[\int\limits_{s_0}^{s_1} (P_1 \sin\alpha - P_4 \sin\beta)\,ds_1 + \int\limits_{x_{20}}^{x_2} (P_2 - 2P_4 \sin\beta)\,dx_2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_{30}}^{x_3} (P_3 - 2P_4 \sin\beta)\,dx_3\right] = (P_4 \sin\beta - P_1 \sin\alpha)\,s_1 + (2P_4 \sin\beta - P_2)\,x_2 +$$

$$+ (2P_4 \sin\beta - P_3)\,x_3 + C.$$

Пример 3.3. Тонкий однородный стержень массы m, длины l подвешен на горизонтальном шарнире A в поле силы тяжести. Другой конец стержня B соединен при помощи невесомой пружины жесткости k с точкой C, расположенной на одинаковой высоте с шарниром A в направлении, перпендикулярном к оси шарнира. Расстояние $AC = 2l$; длина расслабленной пружины равна l. Найти выражение потенциальной энергии системы.

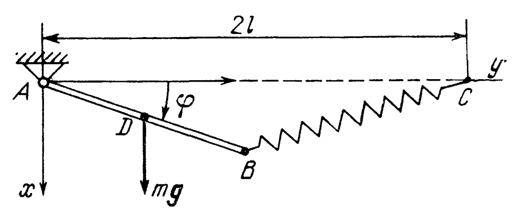


Рис. 3.1

Согласно обозначениям на рис. 3.1 единственной обобщенной координатой рассматриваемой системы является угол φ. Потенциальная энергия состоит из потенциальной энергии Π_1 стержня в поле силы тяжести и потенциальной энергии Π_2 пружины, т. е.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\int\limits_{x_0}^{x_D} mg\,dx + \frac{1}{2}k\,(CB - l)^2 = -mgx_D + \frac{1}{2}\,k\,(CB - l)^2 + \text{const}.$$

Координаты соответствующих точек нетрудно выразить через φ:

$$B\,\{l\sin\varphi,\ l\cos\varphi\},\quad C\,\{0,\ 2l\},\quad D\left\{\frac{l}{2}\sin\varphi,\ \frac{l}{2}\cos\varphi\right\}.$$

Отсюда

$$\Pi = \frac{1}{2}\,kl^2\,(\sqrt{5 - 4\cos\varphi} - 1)^2 - \frac{1}{2}\,mgl\sin\varphi.$$

§ 3.2. Уравнения Лагранжа второго рода в общем случае

Уравнения движения несвободной голономной системы в обобщенных координатах мы получим из общего уравнения динамики (2.28). Приступая к выводу, следует прежде всего определить наименьшее число параметров, характеризующих положение рассматриваемой системы материальных точек, затем выбрать обобщенные координаты. Они должны удовлетворять условиям — однозначно определять положение системы и быть между собой независимыми. В остальном выбор обобщенных координат вообще произволен. Однако весьма важен удачный выбор этих координат. Слово «удачный» нужно понимать в том смысле, что уравнения движения при таком выборе получают наиболее компактный вид. Например, для плоского математического маятника наиболее удачной обобщенной координатой является угол φ. Для сферического маятника (рис. 1.6) такими координатами будут θ и φ.

Выбрав обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (n — число обобщенных координат), следует далее выразить декартовы координаты точек системы через эти обобщенные координаты, т. е. получить функции

$$\begin{aligned} &x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \quad y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \\ &z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, N). \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Отсюда получается эквивалентная зависимость (1.29)

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ t)$$

($\mathbf{r}_\nu$ — радиус-вектор ν-й точки).

В соответствии с (1.33) **можно записать**

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\,\delta q_i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Подставляя это выражение для $\delta\mathbf{r}_\nu$ в общее уравнение динамики (2.28), получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu)\cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\,\delta q_i = 0,$$

или, меняя порядок суммирования,

$$\sum_{i=1}^{n} \delta q_i \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu)\cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = 0.$$

Так как вариации обобщенных координат могут выбираться независимо друг от друга, то полученное равенство будет выполняться только тогда, когда коэффициенты при δq_1, δq_2, …, δq_n будут равны нулю, т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.13}$$

Вспомнив, что обобщенные силы выражаются формулой (1.34)

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

перепишем выражение (3.13) в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{w}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.14}$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, преобразуем следующим образом:

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = m_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(m_\nu \mathbf{v}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right) - m_\nu \mathbf{v}_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right). \tag{3.15}$$

На основании (1.29) имеем

$$\mathbf{v}_\nu = \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}. \tag{3.16}$$

Так как частные производные

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_n}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}$$

являются функциями обобщенных координат и времени, то дифференцируя (3.16) по $\dot{q}_i$, найдем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.17}$$

Продифференцировав выражение (3.16) по q_i, получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i \partial t}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_n \partial q_i} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial t \partial q_i}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial v_\nu}{\partial q_i}. \tag{3.18}$$

Подставляя соотношения (3.17) и (3.18) в выражение (3.15), будем иметь *)

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(m_\nu \mathbf{v}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right) - m_\nu \mathbf{v}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right). \tag{3.19}$$

Но так как

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu v_\nu^2}{2} \tag{3.20}$$

есть кинетическая энергия материальной системы, то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.21}$$

Полученные уравнения называются *уравнениями Лагранжа второго рода.* Производные от обобщенных координат $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$

---

*) Здесь используется равенство $\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q} = v \frac{\partial v}{\partial q}$, вытекающее из соотношения $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$.

называются *обобщенными скоростями.* Уравнения Лагранжа второго рода не содержат реакций идеальных связей, что делает их удобными для практического использования. Таким образом, в общем случае каких угодно активных сил и при наличии идеальных связей движение материальной системы определяется n уравнениями Лагранжа второго рода (3.21).

Для составления левых частей этих уравнений следует выразить кинетическую энергию через обобщенные координаты и обобщенные скорости. Обобщенные силы, стоящие в правых частях этих уравнений, могут быть найдены или непосредственно по формулам (1.34), или как коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы (1.35).

Система уравнений Лагранжа второго рода представляет собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат. Интегрирование этих уравнений дает нам обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_n$ как функции времени и $2n$ произвольных постоянных интегрирования. Далее на основании формул (3.12) можно получить декартовы координаты в зависимости от времени t и $2n$ произвольных постоянных интегрирования.

Если бы рассматриваемая материальная система была свободной, решение дифференциальных уравнений ее движения содержало бы $2 \cdot 3N = 6N$ произвольных постоянных (N — число материальных точек). Следовательно, решение уравнений несвободной системы не досчитывает $6N - 2n = 2(3N - n) = 2k$ постоянных интегрирования. Это произошло потому, что задача решалась при наперед заданных $2k$ интегральных формулах, именно k уравнениях связей и k тех соотношениях, которые можно получить путем однократного дифференцирования этих уравнений связи; соответственно с этим и понизилось число необходимых актов интегрирования на $2k$. Поэтому для задачи о движении несвободной системы полученное решение, содержащее $2n$ произвольных постоянных, является окончательным, исчерпывающим все варианты в задании начальных условий.

Замечание. При применении уравнений Лагранжа второго рода к задачам на относительное движение, а также к задачам с нестационарными связями кинетическую энергию материальной системы следует вычислять в инерциальной системе координат; при нахождении обобщенных сил нужно исходить из того, что связи считаются мгновенно остановленными.

§ 3.3. Примеры на составление уравнений Лагранжа второго рода

Пример 3.4. Составить уравнение движения физического маятника, представляющего собой однородный диск массы M и радиуса r, жестко прикрепленный своим краем к концу A стержня длины l. Другой конец O стержня является точкой подвеса (рис. 3.2). Массой стержня пренебречь.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол $q = \varphi$.

Координатами центра тяжести диска x_C и y_C будут

$$x_C = (l + r)\cos\varphi, \quad y_C = (l + r)\sin\varphi.$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2,$$

где $I_0 = I_C + M(l + r)^2$ есть момент инерции маятника относительно точки

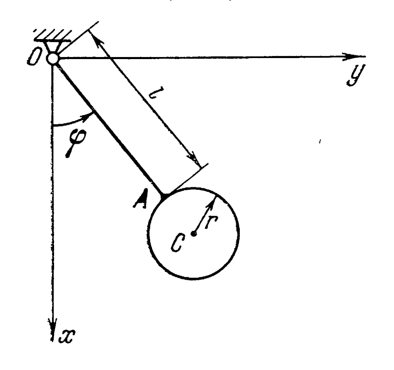


Рис. 3.2

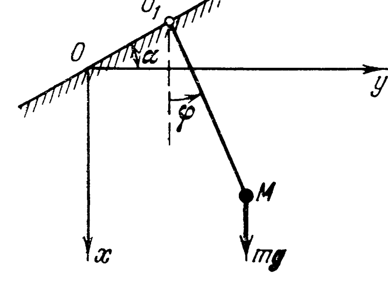


Рис. 3.3

подвеса (I_C — момент инерции диска относительно его центра). Так как

$$I_C = \frac{Mr^2}{2}, \text{ то } I_0 = \frac{M}{2}\left[r^2 + 2(l + r)^2\right].$$

Согласно формуле (1.34) обобщенная сила

$$Q = X\frac{\partial x_C}{\partial \varphi} = -Mg(l + r)\sin\varphi.$$

Имея в виду, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_0\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

получим

$$I_0\ddot{\varphi} = -Mg(l + r)\sin\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g(l + r)}{r^2 + 2(l + r)^2}\sin\varphi = 0.$$

Приведенная длина такого маятника равна

$$l_1 = \frac{r^2 + 2(l + r)^2}{2(l + r)}.$$

Пример 3.5. Составить уравнение движения математического маятника, точка O_1 подвеса которого совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости вдоль прямой, наклоненной под углом α к горизонту (рис. 3.3).

Пусть $OO_1 = a \sin \omega t$. За обобщенную координату возьмем угол $q = \varphi$. Координаты точки M зависят от φ следующим образом:

$$x = l \cos \varphi - OO_1 \sin \alpha = l \cos \varphi - a \sin \omega t \sin \alpha,$$

$$y = l \sin \varphi + OO_1 \cos \alpha = l \sin \varphi + a \sin \omega t \cos \alpha.$$

Так как

$$\dot{x} = -l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - a\omega \cos \omega t \sin \alpha,$$

$$\dot{y} = l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + a\omega \cos \omega t \cos \alpha,$$

то скорость точки M определяется из условия

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}a\omega \cos \omega t \cos (\varphi - \alpha) + a^2\omega^2 \cos \omega t.$$

Следовательно, кинетическая энергия будет равна

$$T = \frac{1}{2} m \left[l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}a\omega \cos \omega t \cos (\varphi - \alpha) + a^2\omega^2 \cos^2 \omega t\right].$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + mla\omega \cos \omega t \cos (\varphi - \alpha),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = - ml\dot{\varphi}a\omega \cos \omega t \sin (\varphi - \alpha).$$

Виртуальная работа равна

$$\delta A = mg\delta x = -mgl \sin \varphi \, \delta\varphi.$$

Следовательно, обобщенная сила

$$Q = -mgl \sin \varphi.$$

Составим теперь уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left[ml^2\dot{\varphi} + mla\omega \cos \omega t \cos (\varphi - \alpha)\right] + \\ + ml\dot{\varphi}a\omega \cos \omega t \sin (\varphi - \alpha) = - mgl \sin \varphi,$$

откуда

$$ml^2\ddot{\varphi} - mla\omega^2 \sin \omega t \cos (\varphi - \alpha) + mgl \sin \varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} - \frac{a}{l} \omega^2 \sin \omega t \cos (\varphi - \alpha) + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Для малых φ это уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{a}{l} \omega^2 \sin \alpha \sin \omega t\right)\varphi = \frac{a}{l} \omega^2 \cos \alpha \sin \omega t.$$

Пример 3.6. Составить уравнения движения центробежного регулятора, схема которого представлена на рис. 3.4. Точечные грузы M_1 и M_2 имеют массы, равные m. Масса муфты A равна M. Массой стержней, длина которых l, пренебречь. Угловая скорость вращения регулятора постоянна и равна ω. Трением пренебречь.

Рассматриваемая система состоит из трех тел: точек M_1 и M_2 и муфты A. Число степеней свободы равно единице. За обобщенную координату примем угол φ.

В неподвижной системе координат $Oxyz$ координатами точек M_1 и M_2 и муфты A будут соответственно

$$x_1 = l\cos\varphi, \quad y_1 = l\sin\varphi\cos(\omega t+\alpha), \quad z_1 = l\sin\varphi\sin(\omega t+\alpha),$$
$$x_2 = l\cos\varphi, \quad y_2 = -l\sin\varphi\cos(\omega t+\alpha), \quad z_2 = -l\sin\varphi\sin(\omega t+\alpha),$$
$$x_3 = 2l\cos\varphi, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = 0,$$

где α — угол, который образует плоскость регулятора с неподвижной плос-

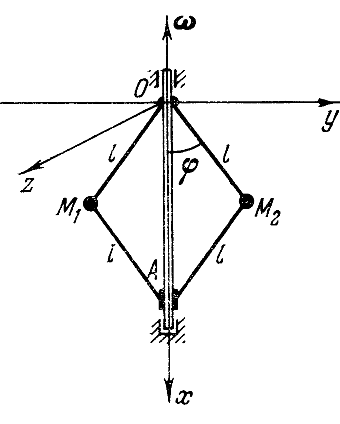


Рис. 3.4

костью xy в начальный момент времени. Скорости точек M_1 и M_2 и муфты A соответственно определяются соотношениями

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\omega^2\sin^2\varphi,$$
$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\omega^2\sin^2\varphi,$$
$$v_3^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi.$$

Кинетическая энергия системы будет равна

$$T = l^2(m + 2M\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + ml^2\omega^2\sin^2\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = 2l^2(m + 2M\sin^2\varphi)\,\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 4Ml^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + 2ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Виртуальная работа равна

$$\delta A = mg\,\delta x_1 + mg\,\delta x_2 + Mg\,\delta x_3 = (-mgl\sin\varphi - mgl\sin\varphi - 2Mgl\sin\varphi)\delta\varphi,$$

и следовательно,

$$Q = -2gl(m+M)\sin\varphi.$$

Составим уравнение Лагранжа

$$(m + 2M\sin^2\varphi)\,\ddot{\varphi} + 2M\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - m\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{g}{l}(m+M)\sin\varphi.$$

Регулятор будет находиться в положении относительного равновесия, если $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$. Это будет при *)

$$\cos\varphi_0 = \frac{(m+M)\,g}{ml\omega^2}.$$

Для того чтобы получить уравнение малых колебаний центробежного регулятора около состояния относительного равновесия (стационарного вращения), введем в рассмотрение новую координату ψ, определяемую равенством

$$\varphi = \varphi_0 + \psi.$$

Тогда

$$\sin(\varphi_0+\psi) = \sin\varphi_0\cos\psi + \cos\varphi_0\sin\psi,$$
$$\cos(\varphi_0+\psi) = \cos\varphi_0\cos\psi - \sin\varphi_0\sin\psi.$$

Для малых ψ

$$\sin(\varphi_0+\psi) \approx \sin\varphi_0 + \psi\cos\varphi_0,$$
$$\cos(\varphi_0+\psi) \approx \cos\varphi_0 - \psi\sin\varphi_0.$$

Подставляя эти выражения в уравнения движения и сохраняя только линейные члены относительно ψ, $\dot{\psi}$, будем иметь

$$\ddot{\psi} + \frac{m\omega^2\sin^2\varphi_0}{m + 2M\sin^2\varphi_0}\,\psi = 0,$$

где

$$\sin^2\varphi_0 = 1 - \left[\frac{(m+M)\,g}{ml\omega^2}\right]^2.$$

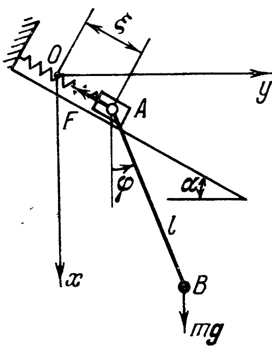


Рис. 3.5

Пример 3.7. Составить уравнения движения для системы, состоящей из груза A массы M, движущегося без трения по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, и прикрепленного к нему математического маятника. Масса груза маятника равна m, нить невесома и имеет длину l. К грузу A прикреплена пружина (рис. 3.5) жесткостью c, другой конец которой закреплен в неподвижной точке.

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты выберем расстояние ξ вдоль плоскости от груза A до точки статического равновесия пружины и угол φ, образуемый маятником с вертикалью. Координатами центра масс груза A и координатами точки B соответственно будут (начало координат помещено в точку статического равновесия)

$$x_1 = \xi\sin\alpha, \qquad y_1 = \xi\cos\alpha,$$
$$x_2 = x_1 + l\cos\varphi = \xi\sin\alpha + l\cos\varphi, \qquad y_2 = y_1 + l\sin\varphi = \xi\cos\alpha + l\sin\varphi.$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{\xi}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\xi}l\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)\right].$$

---

*) Это значит, что равновесное положение возможно, если $\omega^2 > \dfrac{m+M}{ml}\,g$.

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = (M+m)\,\dot{\xi} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + m\dot{\xi}l\cos(\varphi+\alpha),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m\dot{\xi}l\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha).$$

Найдем обобщенные силы. Сила, действующая на груз A со стороны пружины, равна $F = c|\xi+\lambda|$, где λ — статическое удлинение пружины, равное

$$\lambda = \frac{(M+m)\,g\sin\alpha}{c}.$$

Следовательно,

$$\delta A = -c(\xi+\lambda)\sin\alpha\,\delta x_1 - c(\xi+\lambda)\cos\alpha\,\delta y_1 + Mg\,\delta x_1 + mg\,\delta x_2 =$$
$$= [-c(\xi+\lambda) + (M+m)\,g\sin\alpha]\,\delta\xi - mgl\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Отсюда

$$Q_1 = c(\xi+\lambda) + (M+m)\,g\sin\alpha = -c\xi, \quad Q_2 = -mgl\sin\varphi.$$

Уравнениями Лагранжа будут

$$\frac{d}{dt}\left[(M+m)\,\dot{\xi} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)\right] = -c\xi,$$

$$\frac{d}{dt}\left[ml^2\dot{\varphi} + m\dot{\xi}l\cos(\varphi+\alpha)\right] + m\dot{\xi}l\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha) = -mgl\sin\varphi,$$

или

$$(M+m)\,\ddot{\xi} + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha) - ml\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\alpha) = -c\xi,$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + m\ddot{\xi}l\cos(\varphi+\alpha) = -mgl\sin\varphi.$$

§ 3.4. Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил. Первые интегралы движения

Напомним, что обобщенные силы называются *потенциальными*, если существует функция

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \tag{3.22}$$

частными производными от которой по обобщенным координатам, взятыми с обратным знаком, являются эти силы, т. е.

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.23}$$

Функция (3.22) называется *потенциальной энергией*.

Используя формулу (3.23), перепишем уравнения (3.21) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$L = T - \Pi, \tag{3.24}$$

которая называется *функцией Лагранжа* или кинетическим потенциалом. Так как потенциальная энергия от обобщенных скоростей не зависит, то

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и следовательно, уравнения Лагранжа могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.25)$$

Из структуры уравнений (3.25) видно, что если вместо функции L выбрать другую функцию $L_1 = L + \frac{d}{dt} f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$, где f — любая функция обобщенных координат и времени, то функция L_1 тоже будет удовлетворять уравнениям (3.25). То же самое будет, если вместо L взять $L_1 = cL$, где c — любое постоянное число, кроме нуля. В самом деле, рассмотрим функцию $L_1 = cL + \frac{d}{dt} f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = cL + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$ и проделаем над ней операции, необходимые для составления уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_k} = c\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial f}{\partial q_k},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_k} = c\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial t},$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial q_k} = c\frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial t}.$$

Вычитая из второго соотношения третье, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L_1}{\partial q_k} = c\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right),$$

что и требовалось доказать.

Пример 3.8. Составить уравнения (3.25) для материальной системы, схема которой представлена на рис. 3.6. Прямая, по которой движутся грузы M_1, M_2 и M_3, абсолютно гладкая. Массы грузов соответственно равны m_1, m_2 и m_3, а жесткости пружин c_1, c_2 и c_3.

За обобщенные координаты примем расстояния грузов от положения, при котором все пружины находятся в ненапряженном состоянии. Пусть

$q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, $q_3 = x_3$. Кинетическая и потенциальная энергии соответственно равны

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 (x_3 - x_2)^2.$$

Составим функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и найдем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_3 \dot{x}_3,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1), \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -c_2 (x_2 - x_1) + c_3 (x_3 - x_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -c_3 (x_3 - x_2).$$

Следовательно, уравнения (3.35) для рассматриваемого случая будут иметь вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0,$$
$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) - c_3 (x_3 - x_2) = 0,$$
$$m_3 \ddot{x}_3 + c_3 (x_3 - x_2) = 0.$$

Пример 3.9. Составить уравнения движения материальной системы, состоящей из двух тяжелых однородных стержней равной длины l, шарнирно соединенных между собой в точке A (рис. 3.7). Конец одного стержня

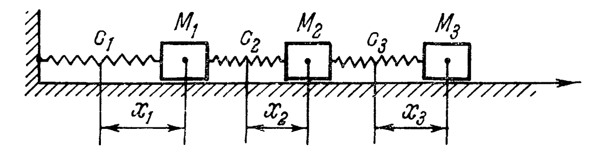


Рис. 3.6

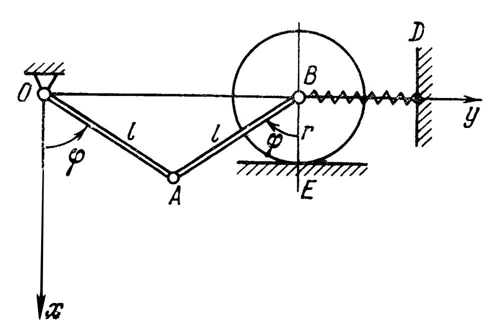


Рис. 3.7

шарнирно укреплен в неподвижной точке O; конец другого стержня шарнирно укреплен в центре однородного диска радиуса r и массы M. Диск катится без скольжения. Центр B диска соединен с неподвижной точкой D пружиной жесткости c. Пружина находится в ненапряженном состоянии при вертикальном положении стержней. Масса каждого из стержней m.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ (угол между осью x и стержнем OA), т. е. $q = \varphi$. Запишем координаты центра масс стержня OA

$$x_1 = \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad y_1 = \frac{l}{2}\sin\varphi,$$

стержня AB

$$x_2 = \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad y_2 = l\sin\varphi + \frac{l}{2}\sin\varphi = \frac{3}{2}l\sin\varphi,$$

диска (точки B)

$$x_3 = 0, \quad y_3 = 2l\sin\varphi$$

(так как $OA = AB = l$). Кинетическая энергия системы равна *)

$$T = \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}I_B\omega^2,$$

где I_0 — момент инерции стержня OA относительно точки O, I — момент инерции стержня AB относительно его центра масс, I_B — момент инерции диска относительно его центра, ω — угловая скорость диска. Найдем теперь v_2^2, v_B^2 и угловую скорость ω диска. Очевидно, что

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \frac{l^2}{4}(1 + 8\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2,$$

$$v_B^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi, \quad \omega = \frac{v_B}{r} = \frac{2l}{r}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2}(K + N\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2,$$

где

$$K = I_0 + I + m\frac{l^2}{4} = \frac{2}{3}ml^2, \quad N = 2ml^2 + 6Ml^2 = 2l^2(m + 3M),$$

так как

$$I_B = \frac{Mr^2}{2}, \quad I_0 = \frac{ml^2}{3}, \quad I = \frac{ml^2}{12}.$$

Потенциальная энергия равна

$$\Pi = -mgx_1 - mgx_2 + \frac{1}{2}cy_3^2 = -mgl\cos\varphi + 2cl^2\sin^2\varphi.$$

Составим функцию Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}(K + N\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi - 2cl^2\sin^2\varphi.$$

Далее находим

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = (K + N\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -N\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 - mgl\sin\varphi - 4cl^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

*) При нахождении кинетической энергии стержня AB и диска применяем теорему Кёнига.

Напишем теперь уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\left[(K+N\cos^2\varphi)\,\dot\varphi\right]+N\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi+mgl\sin\varphi+4cl^2\sin\varphi\cos\varphi=0,$$

или

$$(K+N\cos^2\varphi)\ddot\varphi-N\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi+4cl^2\sin\varphi\cos\varphi+mgl\sin\varphi=0.$$

Если угол φ мал, т. е. если можно пренебречь членами, содержащими φ и $\dot\varphi$ в степени выше первой, то

$$(K+N)\ddot\varphi+(4cl^2+mgl)\varphi=0,$$

т. е. система будет совершать гармонические колебания, период которых равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{K+N}{4cl^2+mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{2(4m+9M)\,l}{12cl+3mg}}.$$

Пример 3.10. Составим уравнения движения материальной точки массы m относительно Земли, происходящего под действием ньютоновской силы притяжения. Землю будем считать однородным шаром.

Введем в рассмотрение систему координат $Oxyz$, имеющую начало в центре Земли, причем ось z направим по оси вращения Земли. Считаем, что эта система не участвует во вращательном движении Земли. Движение по отношению к этой системе координат будем называть абсолютным. За обобщенные координаты примем $q_1=r$, $q_2=\alpha$, $q_3=\beta$, где r — расстояние точки M от центра Земли, α — долгота в абсолютном движении, β — геоцентрическая широта (рис. 3.8). Декартовы координаты материальной точки связаны со сферическими при помощи формул

$$x=r\cos\beta\cos\alpha,\quad y=r\cos\beta\sin\alpha,$$
$$z=r\sin\beta.$$

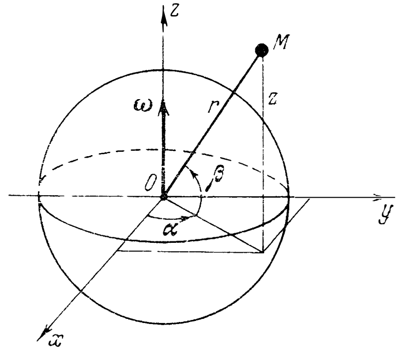


Рис. 3.8

Кинетическая энергия выражается:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot r^2+r^2\dot\beta^2+r^2\dot\alpha^2\cos^2\beta\right).$$

Потенциальная энергия равна [11] $\Pi=-m\mu^2/r$, где $\mu^2=gR^2$. Таким образом, функция Лагранжа

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot r^2+r^2\dot\beta^2+r^2\dot\alpha^2\cos^2\beta\right)+\frac{m\mu^2}{r}.$$

Вычислим производные от L

$$\frac{\partial L}{\partial\dot r}=m\dot r,\quad \frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot\beta^2+mr\dot\alpha^2\cos^2\beta-\frac{m\mu^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\alpha}=mr^2\dot\alpha\cos^2\beta,\quad \frac{\partial L}{\partial\alpha}=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\beta}=mr^2\dot\beta,\quad \frac{\partial L}{\partial\beta}=-mr^2\dot\alpha^2\cos\beta\sin\beta$$

и составим уравнения (3.25)

$$\ddot{r} - r\left(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\beta\right) = -\frac{\mu^2}{r^2}, \tag{3.26}$$

$$mr^2\dot{\alpha}\cos^2\beta = c_1, \tag{3.27}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\beta}\right) + \frac{1}{2}r^2\dot{\alpha}^2\sin 2\beta = 0 \tag{3.28}$$

(c_1 — постоянная интегрирования). Так как движение происходит под действием центральной силы, то момент количества движения точки является постоянной величиной. Найдем проекции момента количества движения на оси x, y, z

$$K_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = mr^2(\dot{\beta}\sin\alpha - \dot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta),$$

$$K_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = -mr^2(\dot{\beta}\cos\alpha + \dot{\alpha}\sin\alpha\sin\beta\cos\beta),$$

$$K_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\alpha}\cos^2\beta.$$

Отсюда видно, что уравнение (3.27) выражает постоянство момента количества движения точки относительно оси z. Модуль момента количества движения равен

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} = mr^2\sqrt{\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\beta} = c_2 = \text{const}. \tag{3.29}$$

Как известно, движение точки под действием центральной силы происходит в плоскости, перпендикулярной к вектору момента количества движения. В самом деле, по определению $\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра Земли к рассматриваемой материальной точке. Умножая левую и правую часть этого равенства на $\mathbf{r}$ скалярно, получим $\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r} = 0$, т. е. уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{K}_0$ и проходящей через центр шара. Движение точки происходит в плоскости, проходящей через центр шара. Линию OK пересечения этой плоскости с экваториальной плоскостью называют линией узлов (рис. 3.9). Обозначим через Ω угол между линией узлов и осью x, через i — угол между экваториальной плоскостью и плоскостью движения точки. В плоскости движения положение точки определяется радиусом r и углом φ. В полярных координатах r и φ момент количества движения точки выражается формулой

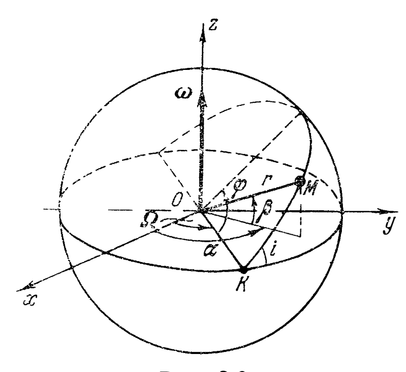


Рис. 3.9

$$K = mr^2\dot{\varphi} = c_2. \tag{3.30}$$

Следовательно, в соответствии с формулой (3.29)

$$\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\beta = \dot{\varphi}^2. \tag{3.31}$$

Уравнение (3.26) движения точки при этом будет

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu^2}{r^2}. \tag{3.32}$$

С помощью замены $u = 1/r$ и соотношения $r^2\dot{\varphi} = c$ (интеграл площадей) это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} \text{ (уравнение Бине)}, \tag{3.33}$$

где

$$p = \frac{c^2}{\mu^2} \quad \left(c = \frac{c_2}{m}\right).$$

Решая это уравнение, получим

$$u = a\cos(\varphi + \varepsilon) + \frac{1}{p},$$

где a и ε — постоянные интегрирования. Так как $u = 1/r$, то

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \varepsilon)}, \tag{3.34}$$

где $e = ap$.

Полученная зависимость представляет собой уравнение конического сечения *).

Переходя к вопросу об интегрировании системы дифференциальных уравнений (3.25), остановимся сначала на понятии интеграла движения.

По определению уравнение

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) = C_1 \tag{3.35}$$

называется *интегралом системы дифференциальных уравнений* (3.25) или просто *интегралом движения*, если при подстановке вместо $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ решения системы (3.25) функция f обращается в постоянную. Поскольку интеграл движения (3.35) содержит о д н у произвольную постоянную, это соотношение иногда называют *первым интегралом*. Таким образом, может существовать несколько первых интегралов. Произвольные постоянные первых интегралов определяются из начальных условий. Отсюда следует, что система дифференциальных уравнений (3.25) может иметь не более $2n$ независимых первых интегралов.

Первые интегралы уравнений Лагранжа второго рода бывают двух видов: обобщенный интеграл энергии и циклические интегралы. Рассмотрим их последовательно и установим условия, при которых эти интегралы имеют место.

Предположим, что функция Лагранжа (кинетический потенциал) голономной системы является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, т. е.

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{3.36}$$

*) Дальнейшее решение этой задачи, т. е. нахождение зависимости между величинами α, β, Ω, i, φ, читатель найдет в книге [27].

Дифференцируя по времени функцию (3.36), получим

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.37}$$

Из уравнений (3.25) следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right).$$

Теперь выражение (3.37) можно переписать в виде

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)+\frac{\partial L}{\partial t}=0. \tag{3.38}$$

Если $\frac{\partial L}{\partial t}=0$, т. е. если функция Лагранжа явно от времени не зависит, то

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)=0$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=h. \tag{3.39}$$

Это выражение называется *обобщенным интегралом энергии* (*интегралом Якоби*). Вспоминая, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$, можем записать

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-T+\Pi. \tag{3.40}$$

Для реономной системы кинетическая энергия выражается формулой (3.7), т. е.

$$T=T_2+T_1+T_0.$$

Подставляя это в формулу (3.40), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}-T_2-T_1-T_0+\Pi.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = T_1.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = T_2 - T_0 + \Pi. \quad (3.41)$$

Заметим, что это выражение не совпадает с полной энергией системы

$$E = T + \Pi = T_2 + T_1 + T_0 + \Pi.$$

Используя формулу (3.41), перепишем обобщенный интеграл энергии (3.39) в виде

$$T_2 - T_0 + \Pi = h. \quad (3.42)$$

Итак, обобщенный интеграл энергии существует, если силы потенциальны, а функция Лагранжа явно от времени t не зависит.

Для склерономных консервативных систем, когда L явно не зависит от времени, $T = T_2$ и обобщенный интеграл будет обычным интегралом

$$T + \Pi = T_2 + \Pi = h. \quad (3.43)$$

Система материальных точек, обладающая обычным интегралом энергии, называется консервативной.

Пример 3.11. Шарик массы m находится внутри прямолинейной горизонтальной трубки AB (рис. 3.10), которая равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку A. Шарик соединен с неподвижной точкой A пружиной жесткости c. Пренебрегая трением, составить обобщенный интеграл энергии.

Примем за обобщенную координату расстояние x шарика от точки A, т. е. $q = x$. Так как $x_1 = x \cos \omega t$, $y_1 = x \sin \omega t$, то скорость шарика равна

$$v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{x}^2 + x^2\omega^2.$$

Следовательно, если пренебречь массой пружины, кинетическая энергия шарика будет равна

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2\omega^2).$$

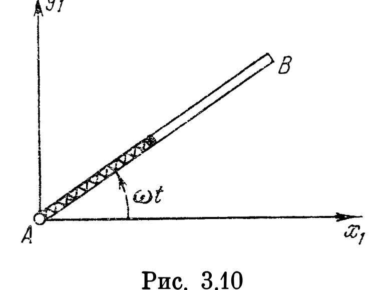


Рис. 3.10

Если x_0 — длина пружины в ненапряженном состоянии, то потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{c}{2} (x - x_0)^2.$$

Составим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2\omega^2) - \frac{c}{2} (x - x_0)^2,$$

найдем $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, и обобщенный интеграл энергии будет иметь вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} mx^2\omega^2 + \frac{c}{2} (x - x_0)^2 = h.$$

Напишем теперь уравнение движения. Учитывая, что

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega^2 x - c (x - x_0),$$

получим уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - m\omega^2 x + c (x - x_0) = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} - m\omega^2 x + c (x - x_0) = 0.$$

После его интегрирования получим

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{c}{2} (x - x_0)^2 = h,$$

т. е. вычисленный выше обобщенный интеграл энергии.

Перейдем теперь к циклическим интегралам. Может случиться, что некоторая обобщенная координата, например q_1, не входит явно в выражение функции Лагранжа L, но эта функция содержит явно соответствующую обобщенную скорость $\dot{q}_1$. Такая координата называется *циклической*. Те же координаты, которые входят в выражение функции Лагранжа явно, называются *позиционными* координатами. Уравнение Лагранжа второго рода, соответствующее циклической координате q_1, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = 0;$$

непосредственное интегрирование его дает

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = c_1. \tag{3.44}$$

Для выяснения физического смысла этого интеграла допустим, что при изменении q_1 на величину dq_1, при сохранении значений остальных координат $q_2, q_3, \ldots, q_n$, вся система материальных точек совершает поступательное перемещение как твердое тело. Примем направление этого перемещния за ось x некоторой неподвижной

декартовой системы координат. Тогда, раскрывая левую часть интеграла (3.44), находим

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y}_\nu \frac{\partial \dot{y}_\nu}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z}_\nu \frac{\partial \dot{z}_\nu}{\partial \dot{q}_1}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_1} + \dot{y}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_1} + \dot{z}_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_1}\right) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{x}_\nu,$$

так как в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_1} = 1, \quad \frac{\partial y_\nu}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial z_\nu}{\partial q_1} = 0.$$

Но величина $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{x}_\nu$ представляет проекцию вектора количества движения системы Q на ось x, поэтому интеграл (3.44) отображает закон сохранения количества движения системы материальных точек в проекции на ось x, вдоль которой система может смещаться как твердое тело при изменении координаты q_1.

Допустим теперь, что при изменении q_1 на величину dq_1, при сохранении значений остальных координат, вся система материальных точек совершает вращательное движение, поворачиваясь на угол $d\varphi$ вокруг некоторой неподвижной в пространстве прямой. Направим вдоль этой прямой ось z неподвижной декартовой системы координат и введем замену переменных $x_\nu = r_\nu \cos \varphi_\nu$, $y_\nu = r_\nu \sin \varphi_\nu$, где $d\varphi_\nu = dq_1$. Тогда $\frac{\partial x_\nu}{\partial q_1} = \frac{\partial x_\nu}{\partial \varphi_\nu} = -r_\nu \sin \varphi_\nu = -y_\nu$, $\frac{\partial y_\nu}{\partial q_1} = \frac{\partial y_\nu}{\partial \varphi_\nu} = r_\nu \cos \varphi_\nu = x_\nu$, $\frac{\partial z_\nu}{\partial q_1} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(x_\nu \dot{y}_\nu - \dot{x}_\nu y_\nu) = \dot{\varphi}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2)$$

представляет момент количеств движения системы материальных точек относительно оси z.

Таким образом, если циклическая координата q_1 является угловой переменной, то циклический интеграл (3.44) отображает закон сохранения момента количеств движения системы материальных точек относительно оси вращения системы как твердого тела при изменении угловой координаты q_1.

Пример 3.12. Рассмотрим движение центробежного регулятора, изображенного на рис. 3.4, в предположении, что угловая скорость вращения ω не является постоянной. Величина $\psi = \int^{t} \omega\, dt$ наряду с φ теперь оказыва-

ется второй обобщенной координатой. Кинетическая энергия записывается в виде

$$T = l^2(m + 2M\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + ml^2\dot{\psi}^2\sin^2\varphi. \qquad (3.45)$$

Нетрудно убедиться в том, что потенциальная энергия рассматриваемого центробежного регулятора не зависит ни от ψ, ни от $\dot{\psi}$, поэтому, согласно выражению (3.45), переменная ψ является циклической координатой. Следовательно, имеет место циклический интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = c_1 \quad \text{или} \quad ml^2\dot{\psi}\sin^2\varphi = c_1. \qquad (3.46)$$

Поскольку ψ — угловая переменная, циклический интеграл (3.46) отображает сохранение момента количества движения центробежного регулятора в проекции на ось x (см. рис. 3.4).

§ 3.5. Уравнения Рауса. Обобщенная потенциальная энергия

В предыдущем параграфе было показано, каким образом циклические координаты приводят к интегралам движения. Но нахождение любого интеграла движения — это шаг к интегрированию дифференциальных уравнений, т. е. к решению поставленной задачи. Иногда может оказаться, что найденные первые интегралы помогают понизить порядок системы дифференциальных уравнений и тем самым упростить дальнейшее решение задачи. Именно такую цель преследует процедура составления уравнений, называемых уравнениями Рауса.

Метод Рауса заключается в одновременном исключении циклических координат из уравнений Лагранжа второго рода, при этом число уравнений движения в независимых координатах понижается на число исключенных циклических координат. Предположим сначала, что все обобщенные координаты позиционные. Тогда функция Лагранжа будет функцией всех обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени t, т. е.

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t); \qquad (3.47)$$

в этом случае мы будем иметь n уравнений Лагранжа (3.25)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.48)$$

Для производных от L по первым r $(r \leqslant n)$ обобщенным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_r$ введем обозначение

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad (3.49)$$

где p_i называются *обобщенными импульсами*. Тогда на основании уравнений (3.48) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \qquad (3.50)$$

Найдем полный дифференциал от функции (3.47):

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Принимая во внимание формулы (3.49) и (3.50), получим

$$dL = \sum_{i=1}^{r} \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{r} p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{r} p_i d\dot{q}_i = d \sum_{i=1}^{r} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{r} \dot{q}_i dp_i,$$

то будет

$$d\left(\sum_{i=1}^{r} p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum_{i=1}^{r} \dot{p}_i dq_i - \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{r} \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.51)$$

Введенную Раусом функцию

$$R = \sum_{i=1}^{r} p_i \dot{q}_i - L \quad (3.52)$$

называют *функцией Рауса.*

Полный дифференциал от функции Рауса имеет вид

$$dR = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial R}{\partial t} dt. \quad (3.53)$$

Сравнивая между собой выражения (3.51) и (3.53) с учетом обозначения (3.52), получим

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = r+1, r+2, \ldots, n). \quad (3.55)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Из условия

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

вытекает, что функция Рауса от первых r обобщенных скоростей не зависит. Подставляя теперь результаты (3.54) и (3.55) в уравнения Лагранжа (3.48), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = r + 1, \ldots, n) \tag{3.56}$$

и

$$\dot{q}_i = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{3.57}$$

Пусть теперь первые r обобщенных координат $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ будут циклическими; тогда

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Следовательно, в соответствии с (3.50) $\dot{p}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

будут постоянными величинами. Из уравнений (3.57) в связи с этим получим

$$\dot{q}_i = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{3.58}$$

Это значит, что циклические координаты не входят в состав функции Рауса. Уравнения же (3.56), которые называются *уравнениями Рауса*, своего вида не изменят. Итак, нами установлено, что *функция Рауса не содержит циклических координат и их производных по времени.*

Для отыскания позиционных координат служат $n - r$ уравнений Рауса (3.56). Циклические же координаты, в соответствии с (3.58), определяются по формулам

$$q_i = \int \frac{\partial R}{\partial p_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{3.59}$$

Пример 3.13. Рассмотрим движение материальной точки, притягиваемой к неподвижному центру по закону всемирного тяготения.

Воспользуемся полярными координатами. Пусть $q_1 = \varphi$, $q_2 = r$. Так как

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \qquad \Pi = -\frac{k^2}{r}$$

(k^2 — постоянная величина), то

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{k^2}{r}.$$

Координата φ является циклической. Значит,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = p = \text{const}.$$

Это выражение является интегралом площадей.

Составим функцию Рауса

$$R = p\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k^2}{r}.$$

Поскольку

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{mr^2},$$

функция

$$R = \frac{p^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{k^2}{r}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = -m\dot{r}, \quad \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{p^2}{mr^3} + \frac{k^2}{r^2}.$$

Составим уравнение Рауса

$$\frac{d}{dt}(-m\dot{r}) + \frac{p^2}{mr^3} - \frac{k^2}{r^2} = 0,$$

или

$$m\ddot{r} - \frac{p^2}{mr^3} + \frac{k^2}{r^2} = 0. \tag{3.60}$$

Это уравнение служит для определения r как функции времени. Так как

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \frac{p}{mr^2},$$

то

$$\varphi = \int \frac{p}{mr^2}\,dt, \tag{3.61}$$

куда вместо r нужно вставить решение уравнения (3.60). Используя то, что $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$, перепишем уравнение (3.60) в виде

$$m\dot{r}\,d\dot{r} = \left(\frac{p^2}{mr^3} - \frac{k^2}{r^2}\right)dr$$

или, после интегрирования,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = -\frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r} + h. \tag{3.62}$$

Это выражение представляет собой интеграл энергии *).

*) Так как система консервативна, то $T + \Pi = h$, т. е.

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k^2}{r} = h.$$

Введя замену $\dot{\varphi} = \frac{p}{mr^2}$, получим

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p^2}{2mr^2} - \frac{k^2}{r} = h.$$

Рассмотрим движения, не уходящие в бесконечность. Для таких движений, в соответствии с формулой (3.62), $h < 0$. Введем обозначение

$$h = -\beta^2.$$

Из выражения (3.62) теперь следует, что

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(-\frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r} - \beta^2\right)}$$

и

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\, dt = \frac{dr}{\sqrt{-\frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r} - \beta^2}}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) = \frac{1}{\beta}\int \frac{r\, dr}{\sqrt{\frac{k^2}{\beta^2}\, r - \frac{p^2}{2m\beta^2} - r^2}}.$$

Введя обозначения

$$\mu = \frac{\beta}{a}\sqrt{\frac{2}{m}}, \quad a = \frac{k^2}{2\beta^2}, \quad b = -\frac{p^2}{2m\beta^2} + \frac{k^4}{4\beta^4},$$

получим

$$\mu a(t - t_0) = \int \frac{r\, dr}{\sqrt{b - (a - r)^2}}.$$

Заменяя

$$a - r = \sqrt{b}\cos E,$$

будем иметь

$$\mu(t - t_0) = \int (1 - e\cos E)\, dE,$$

где $e = \sqrt{b}/a$. Пусть $E = E_0$ при $t = t_0$; тогда

$$\mu(t - t_0) = E - E_0 - e(\sin E - \sin E_0), \tag{3.63}$$

где $E = \arccos\frac{a - r}{ae}$.

Уравнение (3.63) называется *уравнением Кеплера.*

До сих пор мы рассматривали только такие силы, для которых потенциальная энергия была функцией обобщенных координат и времени, т. е.

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n, t). \tag{3.64}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) \tag{3.65}$$

и потребуем, чтобы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

имели вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.66}$$

где

$$L = T - V. \tag{3.67}$$

Очевидно, что если функция V такова, что

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.68}$$

то уравнения Лагранжа будут иметь вид уравнений (3.66). Функция (3.65), с помощью которой можно получить обобщенные силы по формуле (3.68), называется *обобщенной потенциальной энергией*.

Выясним структуру зависимости функции V от обобщенных скоростей. На основании формулы (3.68) имеем

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i\, \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i\, \partial t} - \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Так как обобщенные силы явно от обобщенных ускорений не зависят, то

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. обобщенная потенциальная энергия V может быть только линейной функцией от обобщенных скоростей:

$$V = \Pi(q_i, t) + \sum_{j=1}^{n} \Pi_j(q_i, t)\, \dot{q}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.69}$$

Используя формулу (3.69), определим вид обобщенных сил с помощью соотношения (3.68)

$$Q_i = \frac{d\Pi_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{j=1}^{n} \Pi_j \dot{q}_j + \Pi\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Pi_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Pi_j}{\partial q_i} \dot{q}_j - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} =$$

$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \Pi_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Введем обозначения

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi_j}{\partial q_i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.70}$$

Очевидно, что $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$. Следовательно,

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\dot{q}_j + \frac{\partial \Pi_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (3.71)$$

Если функции Π_i не зависят от времени, то $\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} = 0$ и

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (3.72)$$

Таким образом, если функции Π_i не зависят явно от времени, то обобщенные силы складываются из потенциальных сил $\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)$ и гироскопических сил $\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\dot{q}_j\right)$.

Пример 3.14. Примером силы, имеющей обобщенную потенциальную энергию, является сила Лоренца, действующая на точечный заряд в электромагнитном поле [25]:

$$\mathbf{F} = e\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}\right], \quad (3.73)$$

где e — заряд, $\mathbf{v}$ — скорость точки, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей соответственно, c — скорость света. Если координаты заряда x, y и z, то проекциями силы $\mathbf{F}$ на оси x, y и z будут

$$F_x = eE_x + \frac{e}{c}(\dot{y}H_z - \dot{z}H_y),$$

$$F_y = eE_y + \frac{e}{c}(\dot{z}H_x - \dot{x}H_z),$$

$$F_z = eE_z + \frac{e}{c}(\dot{x}H_y - \dot{y}H_x).$$

Так как

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$

где φ — скалярный потенциал, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, то в силу того, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

имеем

$$F_x = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] =$$

$$= -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\dot{z}\right) + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) =$$

$$= -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right) +$$

$$+ \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right). \quad (3.74)$$

Введем функцию

$$V = e\varphi - \frac{e}{c}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{A} = e\varphi - \frac{e}{c}\left(\dot{x}A_x - \dot{y}A_y + \dot{z}A_z\right) \tag{3.75}$$

и составим выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial V}{\partial x} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\dot{z}\right) + \\ + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right). \tag{3.76}$$

Сравнивая между собой равенства (3.74) и (3.76), получим

$$F_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial V}{\partial x};$$

аналогично можно доказать, что

$$F_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Следовательно, обобщенная потенциальная энергия для силы Лоренца определяется формулой (3.75).

§ 3.6. Уравнения Лагранжа первого рода. Учет дополнительных связей и реакций отброшенных связей

До сих пор мы составляли уравнения движения системы материальных точек с идеальными связями так, что неизвестные реакции связей сразу же исключались из этих уравнений. Однако часто бывает необходимо знать величину той или иной реакции при движении системы, и тогда оказываются полезными уравнения Лагранжа первого рода. Проще всего с ними можно освоиться в декартовой системе координат.

Рассмотрим систему N материальных точек, подчиненную голономным идеальным связям. Дифференциальные уравнения движения точек материальной системы в координатной форме, в проекциях на оси декартовой системы координат имеют вид

$$\begin{gathered} m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu + R_{x\nu}, \\ m_\nu \ddot{y}_\nu = Y_\nu + R_{y\nu}, \\ m_\nu \ddot{z}_\nu = Z_\nu + R_{z\nu} \\ (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \end{gathered} \tag{3.77}$$

где m_ν — масса ν-й точки, X_ν, Y_ν, Z_ν — проекции равнодействующей активных сил, приложенной к ν-й точке, $R_{x\nu}$, $R_{y\nu}$, $R_{z\nu}$ — проекции равнодействующей реакций связей, действующих на ν-ю точку.

Если активные силы заданы, то система уравнений (3.77) представляет собой систему $3N$ уравнений с $6N$ неизвестными: $3N$ координат (x_ν, y_ν, z_ν) и $3N$ проекций реакций связей $(R_{x\nu}, R_{y\nu}, R_{z\nu})$.

Присоединяя к этим уравнениям k уравнений связи

$$f_\mu(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.78}$$

будем иметь уже $3N + k$ уравнений. Для получения остальных $3N - k$ уравнений следует учесть характер связей.

Так как связи идеальные, то проекции реакций связей, в соответствии с формулами (1.27), запишутся в виде

$$\begin{gathered} R_{x\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}, \\ R_{y\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}, \\ R_{z\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, N). \end{gathered} \tag{3.79}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.77), получим

$$\begin{gathered} m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}, \\ m_\nu \ddot{y}_\nu = Y_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}, \\ m_\nu \ddot{z}_\nu = Z_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, N). \end{gathered} \tag{3.80}$$

Присоединяя к этим $3N$ уравнениям k уравнений связей (3.78), будем иметь $3N + k$ уравнений относительно $3N + k$ неизвестных координат x_ν, y_ν, z_ν и множителей Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$. После решения этой системы уравнений проекции реакций могут быть найдены по формулам (3.79).

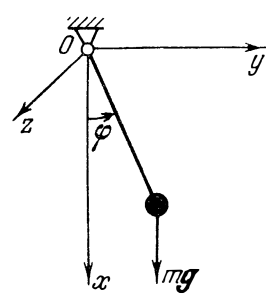


Рис. 3.11

Уравнения (3.80) называются *уравнениями Лагранжа первого рода*. Практическое использование уравнений (3.80) в системах с большим количеством точек весьма затруднительно из-за большого числа уравнений.

Покажем применение этих уравнений на примере системы с одной степенью свободы. Пусть математический маятник совершает движение в вертикальной плоскости xy (рис. 3.11). Уравнения связей имеют в этом случае вид

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \\ f_2(x, y, z) &= z = 0. \end{aligned}$$

На основании (3.80) уравнениями движения будут

$$m\ddot{x} = mg + \lambda_1 2x,$$
$$m\ddot{y} = \lambda_1 2y, \qquad (3.81)$$
$$0 = \lambda_2,$$

так как $z = 0$. Следовательно,

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{m\ddot{y}}{2y}.$$

После умножения первого уравнения системы (3.81) на y и вычитания из него второго уравнения, умноженного на x, получим

$$m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = mgy. \qquad (3.82)$$

Введем замену

$$x = l\cos\varphi, \quad y = l\sin\varphi.$$

Отсюда

$$\dot{x} = -l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}, \quad \dot{y} = l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi},$$
$$\ddot{x} = -l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - l\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}, \quad \ddot{y} = -l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi},$$

и уравнение (3.82) примет известную форму дифференциального уравнения колебания математического маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение при начальных условиях: $t = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Тогда первый интеграл запишется в виде

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 - 2\frac{g}{l}(1 - \cos\varphi). \qquad (3.83)$$

Найдем теперь реакцию нити. В соответствии с формулами (3.79)

$$R_x = \lambda_1 2x = m\ddot{y}\frac{x}{y},$$
$$R_y = \lambda_1 2y = m\ddot{y},$$
$$R_z = 0,$$

и следовательно,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = m|\ddot{y}|\frac{l}{|y|} = ml\left|\frac{\ddot{y}}{y}\right|,$$

или

$$R = ml\left|\dot{\varphi}^2 - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\ddot{\varphi}\right|.$$

Так как

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi,$$

а $\dot{\varphi}^2$ определяется формулой (3.83), то

$$R = ml\left|\dot{\varphi}_0^2 - 2\frac{g}{l}(1 - \cos\varphi) + \frac{g}{l}\cos\varphi\right| = ml\left|\dot{\varphi}_0^2 - \frac{g}{l}(2 - 3\cos\varphi)\right|.$$

Из этого уравнения следует, что связь в виде нити будет удерживающей, если при $\varphi = \pi$ $R \geqslant 0$. Это будет, если начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$ удовлетворяет неравенству $\dot{\varphi}_0^2 \geqslant 5g/l$.

Перейдем теперь к обобщенным координатам и рассмотрим вопрос об учете дополнительных связей, которые могут быть наложены на точки материальной системы.

Пусть на систему, подчиненную k связям, дополнительно налагается еще l связей. В этом случае число ранее выбранных обобщенных координат $3N - k$ будет превосходить число степеней свободы $3N - k - l$, которые теперь имеет рассматриваемая система. Дополнительные связи мы будем учитывать путем введения реакций этих связей в число активных сил. Обозначим эти реакции через $\mathbf{R}_\nu'$. Виртуальная работа при этом вычисляется по формуле

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu') \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} (Q_i + Q_i') \, \delta q_i,$$

где Q_i' — обобщенные силы, обусловленные реакциями $\mathbf{R}_\nu'$. Следовательно, обобщенные силы в уравнениях Лагранжа будут состоять из двух частей, соответствующих активным силам и реакциям новых связей, т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Q_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.84}$$

Если новые связи идеальны, то в соответствии с формулами (1.27)

$$R_{x\nu}' = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\nu}, \quad R_{y\nu}' = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_\nu}, \quad R_{z\nu}' = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.85}$$

где λ_k — множители Лагранжа, а

$$f_k(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l) \tag{3.86}$$

— уравнения дополнительных связей.

Согласно формуле (1.34) имеем

$$Q_i' = \sum_{\nu=1}^{N} \left(R_{x\nu}' \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + R_{y\nu}' \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + R_{z\nu}' \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \right),$$

или, учитывая выражения (3.85),

$$Q_i' = \sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_\nu} + \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i}\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y_\nu} + \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z_\nu}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\lambda_k\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

Таким образом, уравнения (3.84) могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial q_i}. \qquad (3.87)$$

Полученные уравнения (3.87) являются по существу уравнениями Лагранжа первого рода (3.80), записанными в обобщенных координатах.

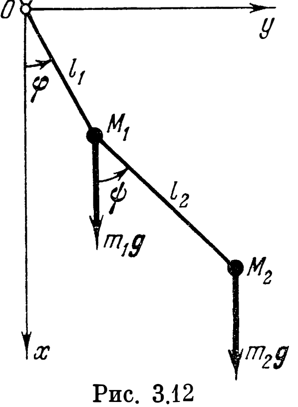


Рис. 3.12

Для фактического решения этой задачи к уравнениям (3.87) (их число $3N-k$) следует присоединить еще l уравнений новых связей (3.86). Тогда мы получим систему $3N-k+l$ уравнений с тем же числом неизвестных: $3N-k$ обобщенных координат и l лагранжевых множителей.

Пример 3.15. Найти реакции, обусловленные введением дополнительной связи, для двойного математического маятника. Массы грузов M_1 и M_2 равны соответственно m_1 и m_2, а длины нитей l_1 и l_2.

Составим сначала уравнения движения двойного маятника без дополнительных связей (рис. 3.12). Число степеней свободы равно двум. Пусть $q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$. Координаты грузов M_1 и M_2 выражаются через φ и ψ формулами

$$x_1 = l_1\cos\varphi, \quad y_1 = l_1\sin\varphi,$$

$$x_2 = l_1\cos\varphi + l_2\cos\psi, \quad y_2 = l_1\sin\varphi + l_2\sin\psi.$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot x_1^2 + \dot y_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot x_2^2 + \dot y_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_2^2\dot\psi^2 + 2l_1l_2\dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi-\psi)\right],$$

и следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot\varphi + m_2l_1l_2\dot\psi\cos(\varphi-\psi), \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = -m_2l_1l_2\dot\varphi\dot\psi\sin(\varphi-\psi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\psi} = m_2l_2^2\dot\psi + m_2l_1l_2\dot\varphi\cos(\varphi-\psi), \quad \frac{\partial T}{\partial\psi} = m_2l_1l_2\dot\varphi\dot\psi\sin(\varphi-\psi).$$

Виртуальная работа

$$\delta A = m_1 g\,\delta x_1 + m_2 g\,\delta x_2 = (-m_1 g l_1 \sin\varphi - m_2 g l_1 \sin\varphi)\,\delta\varphi - m_2 l_2 g \sin\psi\,\delta\psi,$$

откуда

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi, \quad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin\psi.$$

Уравнениями движения системы будут

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi)\,\ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi,$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi)\,\ddot{\varphi} - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) = -m_2 g l_2 \sin\psi.$$

Рассмотрим два случая введения дополнительной связи.

Случай первый. Пусть $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = y_1 = 0$ (рис. 3.13). Для этого случая уравнения (3.97) имеют вид

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi)\,\ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi + \lambda l_1 \cos\varphi,$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi)\,\ddot{\varphi} - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) = -m_2 g l_2 \sin\psi.$$

Присоединим к этим двум дифференциальным уравнениям движения уравнение связи

$$y_1 = l_1 \sin\varphi = 0.$$

Из этого уравнения связи следует, что $\varphi \equiv 0$ и, следовательно, $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$ (т. е. точка M_1 неподвижна). Второе дифференциальное уравнение вырождается в уравнение колебаний простого математического маятника

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l_2} \sin\psi = 0.$$

Из первого дифференциального уравнения находим λ:

$$\lambda = m_2 l_2 \cos\psi \cdot \ddot{\psi} - m_2 l_2 \dot{\psi}^2 \sin\psi.$$

Так как

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l_2} \sin\psi,$$

а

$$\dot{\psi}^2 = \dot{\psi}_0^2 - 2\frac{g}{l_2}(1 - \cos\psi) \quad (\text{при } t = 0 \quad \psi = 0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0),$$

то

$$\lambda = -\sin\psi \left[m_2 l_2 \dot{\psi}_0^2 - m_2 g (2 - 3\cos\psi) \right].$$

В соответствии с (3.85) имеем

$$R'_x = 0,$$

$$R'_y = \lambda = -\sin\psi \left[m_2 l_2 \dot{\psi}_0^2 - m_2 g (2 - 3\cos\psi) \right],$$

т. е. дополнительная сила реакции равна проекции реакции, действующей на точку M_2, на направление оси y.

Случай второй. Пусть теперь дополнительная связь принуждает груз M_2 двигаться только вдоль оси x (рис. 3.14). Уравнением этой связи будет

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = y_2 = l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\psi = 0.$$

Для того чтобы получить уравнения (3.87), следует к правой части перво-

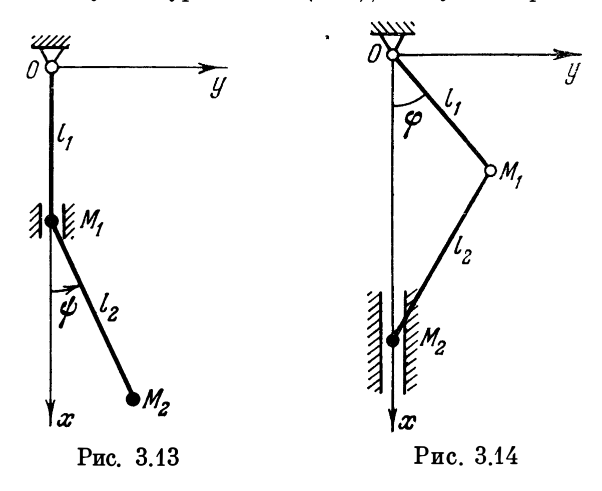


Рис. 3.13 Рис. 3.14

го дифференциального уравнения движения прибавить член

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \lambda l_1 \cos\varphi,$$

а к правой части второго дифференциального уравнения — член

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \psi} = \lambda l_2 \cos\psi.$$

Для упрощения выкладок в дальнейшем положим $l_1 = l_2 = l$. В этом случае из уравнения связи следует:

$$\sin\psi = -\sin\varphi,$$

откуда, в частности,

$$\psi = -\varphi.$$

Подставив этот результат в уравнения движения, получим

$$(m_1 + m_2) l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l^2 \cos 2\varphi \cdot \ddot{\varphi} + m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = -(m_1 + m_2) g l \sin\varphi + \lambda l \cos\varphi,$$

$$-m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l^2 \cos 2\varphi \ddot{\varphi} - m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = m_2 g l \sin\varphi + \lambda l \cos\varphi. \quad (3.88)$$

Вычитая из первого уравнения второе, будем иметь

$$\left(m_1 + 4m_2 \sin^2\varphi\right) \ddot{\varphi} + 2m_2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = -(m_1 + 2m_2) \frac{g}{l} \sin\varphi.$$

Это уравнение служит для определения закона движения полученной системы.

Складывая теперь между собой уравнения (3.88), найдем уравнение для определения λ

$$\lambda = \frac{m_1 l \ddot{\varphi}}{2\cos\varphi} + \frac{m_1 g}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Дальнейшее решение задачи заключается в определении из уравнения движения угла φ; после этого по формулам

$$R'_{x_2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad R'_{y_2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y_2} = \lambda$$

находится реакция дополнительной связи.

Перейдем теперь к отысканию обобщенных реакций отброшенных связей [30]. Для этого рассмотрим голономную систему с n степенями свободы. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты, определяющие положение системы. Отбросим r связей. Тогда число степеней свободы увеличится до $n+r$. К старым обобщенным координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$ прибавим r новых $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots$ $\ldots, q_{n+r}$ и будем иметь в виду, что при $q_{n+\mu} = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, r)$ новая материальная система совпадает с исходной системой. Мы можем представить переход от новой системы к исходной как наложение на новую систему r новых связей вида

$$f_{n+\mu} = q_{n+\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, r).$$

Тогда, в соответствии с уравнениями (3.87), имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\mu=1}^{r}\lambda_\mu\frac{\partial f_{n+\mu}}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+r).$$

Но так как

$$\frac{\partial f_{n+\mu}}{\partial q_i} = \begin{cases} 0 & n+\mu \neq i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+r), \\ 1 & n+\mu = i \quad (\mu = 1, 2, \ldots, r), \end{cases}$$

то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_i \qquad (i = n+1, \ldots, n+r).$$

Эти уравнения нужно рассматривать совместно с уравнениями связей

$$f_{n+\mu} = q_{n+\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, r)$$

и только после составления полученных уравнений в них следует положить

$$q_{n+\mu} = 0, \quad \dot{q}_{n+\mu} = 0, \quad \ddot{q}_{n+\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, r).$$

Итак, для получения обобщенных реакций отброшенных связей служат уравнения

$$\lambda_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \qquad (i = n+1, n+2, \ldots, n+r), \tag{3.89}$$

в которых после их составления следует положить

$$q_{n+\mu} = 0, \quad \dot{q}_{n+\mu} = 0, \quad \ddot{q}_{n+\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, r).$$

Пример 3.16. Тело A массы m_1, подвешенное на пружине жесткостью c, может совершать движение по вертикали. С помощью шарнира к телу A прикреплен невесомый стержень длины l, на другом конце которого прикреплено тело B массы m_2. Тело B движется по горизонтальной направляющей (рис. 3.15). Пренебрегая трением, определить реакцию горизонтальной направляющей.

Начало координат возьмем в положении тела A при ненапряженной пружине. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем отклонение тела A от его положения при ненапряженной пружине $q_1 = x_1$. Рассмотрим теперь новую систему, когда

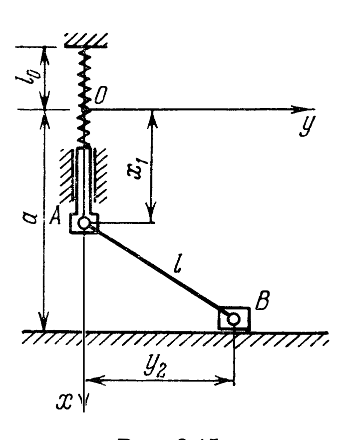


Рис. 3.15

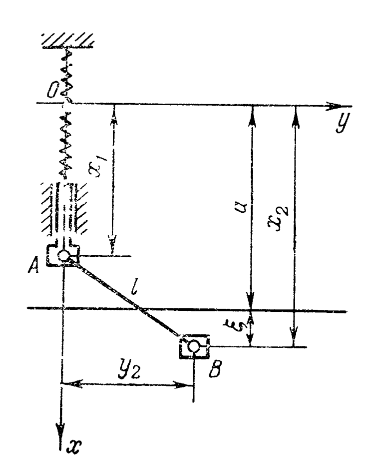


Рис. 3.16

отсутствует горизонтальная направляющая (рис. 3.16). Эта система имеет уже две степени свободы. За обобщенные координаты примем $q_1 = x_1$, $q_2 = \xi$. Координатами тела A и B соответственно будут

$$x_1 = x_1, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = a + \xi, \quad y_2 = \sqrt{l^2 - (a + \xi - x_1)^2},$$

где a — расстояние от начала координат до направляющей. Кинетическая энергия системы выразится формулой

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{1}{2}\left[(m_1 + K m_2)\dot{x}_1^2 - 2m_2 K \dot{x}_1 \dot{\xi} + m_2 \dot{\xi}^2\right],$$

где

$$K = \frac{(a + \xi - x_1)^2}{l^2 - (a + \xi - x_1)^2}.$$

Найдем теперь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = -m_2 K \dot{x}_1 + m_2 \dot{\xi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{2} m_2 \frac{\partial K}{\partial \xi} \dot{x}_1^2 - m_2 \frac{\partial K}{\partial \xi} \dot{x}_1 \dot{\xi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) = -m_2 K \ddot{x}_1 - m_2 \frac{dK}{dt} \dot{x}_1 + m_2 \ddot{\xi},$$

где

$$\frac{\partial K}{\partial \xi} = \frac{2l^2 (a + \xi - x_1)}{\left[l^2 - (a + \xi - x_1)^2\right]^2}, \quad \frac{dK}{dt} = \frac{2l^2 (a + \xi - x_1)}{\left[l^2 - (a + \xi - x_1)^2\right]^2} (\dot{\xi} - \dot{x}_1).$$

В соответствии с соотношениями (3.89) получаем реакцию направляющей, полагая $\xi = 0$, $\dot{\xi} = 0$, $\ddot{\xi} = 0$:

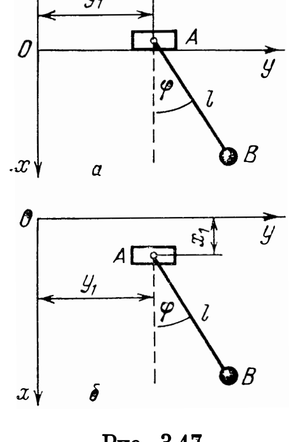


Рис. 3.17

$$\lambda_2 = -m_2 \frac{(a - x_1)^2}{l^2 - (a - x_1)^2} \ddot{x}_1 + m_2 \frac{l^2 (a - x_1)}{\left[l^2 - (a - x_1)^2\right]^2} - Q_2.$$

Но так как

$$\delta A = (-cx_1 + m_1 g)\delta x_1 + m_2 g\, \delta\xi,$$

то

$$Q_1 = -cx_1 + m_1 g, \quad Q_2 = m_2 g$$

и, следовательно,

$$\lambda_2 = -m_2 \frac{(a - x_1)^2}{l^2 - (a - x_1)^2} \ddot{x}_1 + m_2 \frac{l^2 (a - x_1)}{\left[l^2 - (a - x_1)^2\right]^2} \dot{x}_1^2 - m_2 g.$$

Уравнение для определения x_1 имеет вид

$$\left[m_1 + m_2 \frac{(a - x_1)^2}{l^2 - (a - x_1)^2}\right] \ddot{x}_1 - \frac{m_2 l^2 (a - x_1) \dot{x}_1^2}{\left[l^2 - (a - x_1)^2\right]^2} = -cx_1 + m_1 g.$$

Это уравнение Лагранжа, составленное для координаты x_1, в котором положено $\xi = \dot{\xi} = \ddot{\xi} = 0$.

Пример 3.17. Тело A массы M может двигаться по гладкой горизонтальной направляющей. К нему на невесомом стержне длины l шарнирно прикреплено тело B массы m (рис. 3.17, a). Найти реакцию направляющей, принимая тела A и B за материальные точки.

Примем за обобщенные координаты расстояние y_1 точки A от начала координат и угол φ отклонения стержня от вертикали:

$$q_1 = y_1, \quad q_2 = \varphi.$$

Отбросим теперь связь, наложенную на тело A, т. е. освободим тело A от направляющей. Новая система имеет три степени свободы, и новая обобщенная координата $q_3 = x_1$ (рис. 3.17, $б$). При $x_1 \equiv 0$ новая система совпа-

дает с исходной. Пусть координаты точки A — x_1 и y_1, а точки B — x_2, y_2, тогда

$$x_2 = x_1 + l\cos\varphi, \quad y_2 = y_1 + l\sin\varphi.$$

Кинетическая энергия определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{1}{2}(M+m)\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}_1 l\dot{\varphi}\sin\varphi + 2\dot{y}_1 l\dot{\varphi}\cos\varphi\right).$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (M+m)\dot{x}_1 - ml\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = (M+m)\ddot{x}_1 - ml\ddot{\varphi}\sin\varphi - ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi.$$

В соответствии с (3.89) получим

$$\lambda_3 = -ml\ddot{\varphi}\sin\varphi - ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi - Q_3.$$

Найдем обобщенные силы. Так как

$$\delta A = Mg\,\delta x_1 + mg\,\delta x_2 = (M+m)g\,\delta x_1 - mgl\sin\varphi\,\delta\varphi,$$

то

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = -mgl\sin\varphi, \quad Q_3 = (M+m)g$$

и, следовательно,

$$\lambda_3 = -ml\ddot{\varphi}\sin\varphi - ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi - (M+m)g.$$

Значения φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, которые следует подставить в это выражение, находятся из уравнений Лагранжа второго рода, составленных для координат y_1 и φ (в которых учтено, что $x_1 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0$)

$$\frac{d}{dt}\left[(M+m)\dot{y}_1 + ml\dot{\varphi}\cos\varphi\right] = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\ddot{y}_1}{l}\cos\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

§ 3.7. Уравнения Лагранжа в квазикоординатах

В § 1.5 были введены понятия истинных координат и квазикоординат и показано, что существуют задачи, рассмотрение которых в квазикоординатах оказывается даже предпочтительнее. Это можно объяснить тем, что при исследовании движения механических систем существенную роль часто играет удачный выбор переменных, в которых описывается это движение. История развития механики свидетельствует о том, что успеху в решении многих трудных задач способствовало введение квазикоординат. Как известно, с использованием квазикоординат была поставлена и исследована задача Эйлера о движении по инерции твердого тела

с закрепленной точкой. С. А. Чаплыгин рассмотрел в квазикоординатах задачу о плоском неголономном движении, а также не менее трудную задачу о катании неоднородного шара по плоскости.

Метод подвижных осей, широко используемый в механике, представляет по существу метод записи уравнений движения в квазикоординатах.

Введение квазикоординат и запись уравнений Лагранжа второго рода в квазикоординатах предоставили возможность записывать в одной и той же форме уравнения голономной и неголономной систем, уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой и даже описывать движение систем с неудерживающими кинематическими связями. Уравнения в квазикоординатах были получены в 1902 г. Л. Больцманом [46] и в 1904 г. Г. Гамелем [47, 48]. Эти уравнения*) были выведены в предположении, что обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и квазикоординаты $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ связаны соотношениями

$$\dot{\pi}_j = \sum_{s=1}^{n} a_{js}\dot{q}_s, \quad \dot{q}_s = \sum_{i=1}^{n} b_{si}\dot{\pi}_i \qquad (j, s = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.90}$$

где коэффициенты a_{js} и b_{si} — функции обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и удовлетворяют условиям

$$\sum_{s=1}^{n} a_{js}b_{si} = \delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \tag{3.91}$$

В более общем случае уравнения (3.90), линейные относительно производных по времени, могут быть неоднородными

$$\dot{\pi}_j = \sum_{s=1}^{n} a_{js}\dot{q}_s + a_j, \quad \dot{q}_s = \sum_{i=1}^{n} b_{si}\dot{\pi}_i + b_s \qquad (j, s = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.92}$$

Здесь коэффициенты a_{js}, a_j, b_{si}, b_i могут зависеть также и от времени t. Нетрудно проверить, что коэффициенты a_{js}, b_{si} в этих уравнениях также удовлетворяют требованиям (3.91). Кроме того, из второй группы уравнений (3.92) следует, что

$$\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_i} = \frac{\partial q_s}{\partial \pi_i} = b_{si}. \tag{3.93}$$

Поэтому для любой функции $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ выражение $\dfrac{\partial f}{\partial \pi_i}$ означает согласно (3.93) следующую операцию:

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_i} = \frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial \pi_i} = \frac{\partial f}{\partial q_s} b_{si}. \tag{3.94}$$

Выведем уравнения Лагранжа в квазикоординатах в этом более общем случае [30, 42]. Пусть $T = T(q, \dot{q}, t)$ — кинетическая энер-

*) Они были названы Г. Гамелем *уравнениями Лагранжа — Эйлера.*

гия системы, конфигурация которой определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Будем исходить из общего уравнения динамики (2.28), которое при переходе к обобщенным координатам (см. § 3.2) записывается в виде

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}-Q_s\right)\delta q_s=0. \tag{3.95}$$

Здесь $Q_s(q, \dot{q}, t)$ — заданные обобщенные силы, действующие на рассматриваемую систему, все связи которой предполагаются идеальными.

Введем квазикоординаты $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, производные которых по времени связаны с обобщенными скоростями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ посредством n независимых неоднородных линейных уравнений (3.92), которые являются неинтегрируемыми, т. е. не сводятся к конечным (функциональным) соотношениям между $\pi_1, \pi_2, \ldots$ $\ldots, \pi_n$ и $q_1, q_2, \ldots, q_n$. В соответствии с (3.92) вариации δq_s и $\delta\pi_i$ связаны выражениями $\delta q_s=\sum\limits_{i=1}^{n} b_{si}\delta\pi_i$. Подставляя их в (3.95), получим равную нулю сумму, которая вследствие независимости вариаций квазикоординат $\delta\pi_i$ распадается на n уравнений вида

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)b_{si}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}b_{si}=\sum_{s=1}^{n}Q_s b_{si}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n). \tag{3.96}$$

Здесь величина $\Pi_i=\sum\limits_{s=1}^{n}Q_s b_{si}$ представляет обобщенную силу, которая производит работу на перемещении $\delta\pi_i$. Введем функцию $T^*(q, \pi, t)$, которая получается из выражения кинетической энергии $T(q, \dot{q}, t)$ после исключения из нее всех обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ при помощи соотношений (3.92). Если в полученной таким образом функции $T^*(q, \pi, t)$ проделать обратный переход, используя первую группу соотношений (3.92), то, очевидно, вновь вернемся к $T(q, \dot{q}, t)$, т. е.

$$T^*\left(q, \sum_{s=1}^{n}a_{js}\dot{q}_s+a_j, t\right)=T(q, \dot{q}, t). \tag{3.97}$$

Дифференцируя (3.97) по переменной q_s, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial T^*}{\partial q_s}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j}\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{rk}\dot{\pi}_k+b_r\right)+\frac{\partial a_j}{\partial q_s}\right].$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_s} b_{si} = \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} + \sum_{j,s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{rk} \dot{\pi}_k + b_r \right) + \frac{\partial a_j}{\partial q_s} \right] b_{si},$$

где введен оператор

$$\frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial q_s} b_{si}.$$

Дифференцируя (3.97) теперь по переменной $\dot{q}_s$, получаем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} a_{js}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \right) a_{js} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \frac{da_{js}}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \right) a_{js} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{rk} \dot{\pi}_k + b_r \right) + \frac{\partial a_{js}}{\partial t} \right].$$

Используя (3.91), приходим к следующему соотношению:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) b_{si} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_i} +$$

$$+ \sum_{j,s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a_{is}}{\partial q_r} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{rk} \dot{\pi}_k + b_r \right) + \frac{\partial a_{js}}{\partial t} \right] b_{si}.$$

Подставляя найденные выражения

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_s} b_{si} \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) b_{si}$$

в уравнения (3.96), получаем уравнения Лагранжа в квазикоординатах:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} \dot{\pi}_k + \gamma_{ij} \right) = \Pi_i. \qquad (3.98)$$

Здесь введен оператор

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i} = \sum_{s=1}^{n} b_{si} \frac{\partial}{\partial q_s},$$

который в случае, когда $\pi_i = \dot{q}_i$, совпадает с оператором частной производной, а также введены обозначения

$$\gamma_{ijk} = \sum_{s,r=1}^{n} b_{si} b_{rk} \left(\frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} \right),$$
$$\gamma_{ij} = \sum_{s=1}^{n} b_{si} \left[\sum_{r=1}^{n} b_r \left(\frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} \right) + \frac{\partial a_{js}}{\partial t} - \frac{\partial a_j}{\partial q_s} \right]. \tag{3.99}$$

Выражения коэффициентов γ_{ijk}, γ_{ij} в этих уравнениях зависят только от структуры соотношений (3.92) между истинными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и квазикоординатами $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ и совершенно не зависят от начальных условий и характера движения рассматриваемой системы. Согласно (3.99) нахождение коэффициентов γ_{ijk} и γ_{ij} представляет довольно трудоемкую работу, связанную с двойным суммированием сложных выражений. Однако этой процедуры можно избежать, если воспользоваться так называемыми перестановочными соотношениями [35, 37], которые составляются по сравнительно простому алгоритму: сначала, исходя из уравнений (3.92), записанных для вариаций переменных*), вычисляется дифференциал

$$d(\delta\pi_j) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial a_{js}}{\partial t} dt \right) \delta q_s + \sum_{s=1}^{n} a_{js} \, d\delta q_s =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{rk} \, d\pi_k + b_r \, dt \right) + \frac{\partial a_{js}}{\partial t} dt \right] \sum_{i=1}^{n} b_{si} \delta\pi_i + \sum_{s=1}^{n} a_{js} d\delta q_s.$$

Затем вычисляется вариация

$$\delta(d\pi_j) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} dq_r + \frac{\partial a_j}{\partial q_s} dt \right) \delta q_s + \sum_{s=1}^{n} a_{js} \delta \, dq_s =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{rk} \, d\pi_k + b_r \, dt \right) + \frac{\partial a_j}{\partial q_s} dt \right] \sum_{i=1}^{n} b_{si} \delta\pi_i + \sum_{s=1}^{n} a_{js} \delta \, dq_s.$$

Вычитая второе выражение из первого и используя обозначения (3.99), а также то, что при обходе по замкнутому контуру в пространстве конфигураций голономной системы $d\delta q_s - \delta dq_s = 0$, получаем перестановочные соотношения

$$d\delta\pi_j - \delta \, d\pi_j = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ijk} \, d\pi_k \delta\pi_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \, dt \, \delta\pi_i, \tag{3.100}$$

*) Следует помнить, что при изохронной вариации время не варьируется, т. е. $\delta t \equiv 0$.

которые и позволяют находить коэффициенты γ_{ijk} и γ_{ij}. Для идентификации величин полезно заметить, что индекс i — это индекс уравнения движения; j — это индекс квазикоординаты, для которой составляется перестановочное соотношение; k — это индекс квазискорости, являющейся сомножителем при γ_{ijk} в уравнениях движения (3.98).

В силу определения (3.99) коэффициенты γ_{ijk} удовлетворяют условиям

$$\gamma_{ijk} = -\gamma_{kji}, \tag{3.101}$$

т. е. величины γ_{ijk} образуют относительно крайних индексов кососимметричную матрицу.

Уравнения (3.98) отличаются от известных уравнений Больцмана — Гамеля [46, 47] дополнительными членами $\gamma_{ij}\dfrac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j}$. Эти члены обращаются в нуль, если система уравнений связи между обобщенными координатами и квазикоординатами (3.92) будет однородной с коэффициентами, не зависящими явно от времени t. В случае интегрируемости уравнений (3.92) уравнения (3.98) оказываются обычными уравнениями Лагранжа второго рода.

В качестве упражнения на составление уравнений движения в форме уравнений в квазикоординатах рассмотрим два примера, в которых коэффициенты $\gamma_{ij} = 0$ и, следовательно, уравнения в квазикоординатах совпадают с уравнениями Больцмана — Гамеля или, что то же, Эйлера — Лагранжа.

П р и м е р 3.18. Уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой. Положение тела будем определять углами Эйлера [10]. Примем

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \psi.$$

Кинетическая энергия твердого тела при условии, что оси x, y и z жестко связаны с телом и являются главными осями инерции для неподвижной точки тела, равна

$$T = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right),$$

где I_x, I_y, I_z — главные осевые моменты инерции тела, а ω_x, ω_y и ω_z — проекции угловой скорости тела соответственно на оси x, y и z. Проекции угловой скорости связаны с углами Эйлера и их производными кинематическими формулами Эйлера:

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.$$

Примем за квазискорости проекции угловой скорости, т. е.

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}_1 &= \dot{q}_1\cos q_2 + \dot{q}_3\sin q_1\sin q_2,\\
\dot{\pi}_2 &= -\dot{q}_1\sin q_2 + \dot{q}_3\sin q_1\cos q_2,\\
\dot{\pi}_3 &= \dot{q}_2 + \dot{q}_3\cos q_1.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Отсюда следует, что

$$a_{11}=\cos q_2,\quad a_{12}=0,\quad a_{13}=\sin q_1\sin q_2,$$
$$a_{21}=-\sin q_2,\quad a_{22}=0,\quad a_{23}=\sin q_1\cos q_2,$$
$$a_{31}=0,\quad a_{32}=1,\quad a_{33}=\cos q_1.$$

Из соотношений (3.102) получим

$$\dot q_1=\cos q_2\dot\pi_1-\sin q_2\dot\pi_2,$$
$$\dot q_2=-\frac{\cos q_1\sin q_2}{\sin q_1}\dot\pi_1-\frac{\cos q_1\cos q_2}{\sin q_1}\dot\pi_2+\dot\pi_3,$$
$$\dot q_3=\frac{\sin q_2}{\sin q_1}\dot\pi_1+\frac{\cos q_2}{\sin q_1}\dot\pi_2,$$

откуда

$$b_{11}=\cos q_2,\quad b_{12}=-\sin q_2,\quad b_{13}=0,$$
$$b_{21}=-\frac{\cos q_1\sin q_2}{\sin q_1},\quad b_{22}=-\frac{\cos q_1\cos q_2}{\sin q_1},\quad b_{23}=1,$$
$$b_{31}=\frac{\sin q_2}{\sin q_1},\quad b_{32}=\frac{\cos q_2}{\sin q_1},\quad b_{33}=0.$$

Очевидно, что

$$T^*=\frac{1}{2}\left(I_x\dot\pi_1^2+I_y\dot\pi_2^2+I_z\dot\pi_3^2\right).$$

Формулы для подсчета γ_{ijk} имеют вид

$$\gamma_{ijk}=(b_{1i}b_{2k}-b_{2i}b_{1k})\left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial q_2}-\frac{\partial a_{j2}}{\partial q_1}\right)+$$
$$+\frac{\partial a_{j3}}{\partial q_1}(b_{3i}b_{1k}-b_{1i}b_{3k})+\frac{\partial a_{j3}}{\partial q_2}(b_{3i}b_{2k}-b_{2i}b_{3k}).$$

Отсюда

$$\gamma_{123}=-1,\quad \gamma_{132}=1,\quad \gamma_{231}=-1,\quad \gamma_{213}=1,\quad \gamma_{312}=-1,\quad \gamma_{321}=1.$$

Все остальные γ равны нулю.

Уравнения Эйлера — Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(I_x\dot\pi_1\right)-I_y\dot\pi_2\dot\pi_3+I_z\dot\pi_3\dot\pi_2=P_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(I_y\dot\pi_2\right)-I_z\dot\pi_3\dot\pi_1+I_x\dot\pi_1\dot\pi_3=P_2,$$
$$\frac{d}{dt}\left(I_z\dot\pi_3\right)-I_x\dot\pi_1\dot\pi_2+I_y\dot\pi_2\dot\pi_1=P_3,$$

или

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt}+\omega_y\omega_z(I_z-I_y)=M_x,$$
$$I_y\frac{d\omega_y}{dt}+\omega_x\omega_z(I_x-I_z)=M_y,$$
$$I_z\frac{d\omega_z}{dt}+\omega_x\omega_y(I_y-I_x)=M_z,$$

где M_x, M_y, M_z — моменты сил соответственно относительно осей x, y, z.

Пример 3.19. Вывод уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе с учетом массы кардановых колец.

Схема гироскопа представлена на рис. 3.18. Начало координат выберем в точке пересечения осей карданова подвеса. Подвижную систему координат свяжем с внутренним кольцом, направив ось Ox по оси вращения ротора, ось Oy — по оси вращения внутреннего кольца. Ось Oz_1 неподвижной системы координат направлена по оси вращения наружного кольца. Тогда положение подвижной системы координат $Oxyz$ по отношению к неподвижной

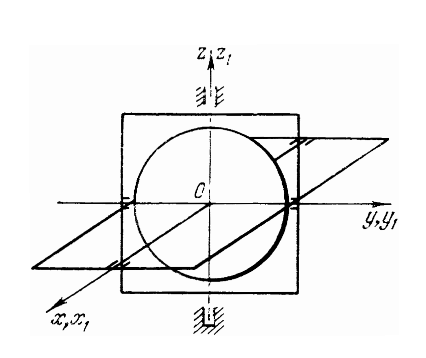


Рис. 3.18

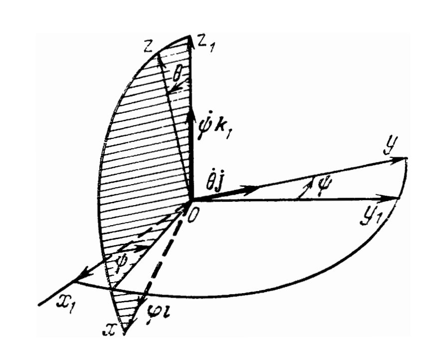


Рис. 3.19

$Ox_1y_1z_1$ определится двумя углами ψ и θ. Угол вращения ротора вокруг оси Ox обозначим через φ (рис. 3.19). Проекции угловой скорости наружного кольца равны

$$\omega_{\text{н}x_1} = 0, \quad \omega_{\text{н}y_1} = 0, \quad \omega_{\text{н}z_1} = \dot{\psi}.$$

Проекции угловой скорости внутреннего кольца и ротора соответственно равны

$$\omega_{\text{в}x} = -\dot{\psi}\sin\theta, \quad \omega_{\text{в}y} = \dot{\theta}, \quad \omega_{\text{в}z} = \dot{\psi}\cos\theta,$$

$$\omega_x = \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta, \quad \omega_y = \dot{\theta}, \quad \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta.$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы равна

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{н}z_1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left(I_{\text{в}x}\omega_{\text{в}x}^2 + I_{\text{в}y}\omega_{\text{в}y}^2 + I_{\text{в}z}\omega_{\text{в}z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right),$$

где $I_{\text{н}z_1}$ — момент инерции наружного кольца относительно оси Oz_1, $I_{\text{в}x}$, $I_{\text{в}y}$, $I_{\text{в}z}$ — моменты инерции внутреннего кольца, I_x, I_y, I_z — моменты инерции ротора. В силу симметрии имеем $I_{\text{в}x} = I_{\text{в}y}$, $I_y = I_z$. За обобщенные координаты примем

$$q_1 = \psi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi,$$

а за квазискорости

$$\dot{\pi}_1 = \omega_x = \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta = -\dot{q}_1\sin q_2 + \dot{q}_3,$$

$$\dot{\pi}_2 = \omega_y = \dot{\theta} = \dot{q}_2,$$

$$\dot{\pi}_3 = \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta = \dot{q}_1\cos q_2.$$

Из этих соотношений получаем

$$\dot q_1 = \frac{1}{\cos q_2}\dot\pi_3, \quad \dot q_2 = \dot\pi_3, \quad \dot q_3 = \dot\pi_1 + \frac{\sin q_2}{\cos q_2}\dot\pi_3.$$

Таким образом, имеем

$$T^* = \frac{1}{2}\left[I_x\dot\pi_1^2 + I_2\dot\pi_2^2 + I_3(q_2)\dot\pi_3^2\right],$$

где

$$I_2 = I_{\text{в}x} + I_z,$$

$$I_3(q_2) = \frac{I_{\text{н}z_1} + I_{\text{в}z} + I_z + (I_{\text{в}x} - I_{\text{в}z} - I_z)\sin^2 q_2}{\cos^2 q_2}.$$

Так как для рассматриваемой системы

$$d\pi_1 = -\sin q_2\, dq_1 + dq_3, \qquad \delta\pi_1 = -\sin q_2\delta q_2 + \delta q_3,$$
$$d\pi_2 = dq_2, \qquad \delta\pi_2 = \delta q_2,$$
$$d\pi_3 = \cos q_2\, dq_1, \qquad \delta\pi_3 = \cos q_2\delta q_1,$$
$$dq_1 = \frac{d\pi_3}{\cos q_2}, \qquad \delta q_1 = \frac{\delta\pi_3}{\cos q_2},$$
$$dq_2 = d\pi_2, \qquad \delta q_2 = \delta\pi_2,$$
$$dq_3 = d\pi_1 + \frac{\sin q_2}{\cos q_2}d\pi_3, \qquad \delta q_3 = \delta\pi_1 + \frac{\sin q_2}{\cos q_2}\delta\pi_3,$$

то в соответствии с формулой (3.100)

$$d(\delta\pi_1) - \delta(d\pi_1) = \gamma_{i1k}\delta\pi_i d\pi_k = -\delta\pi_3 d\pi_2 + \delta\pi_2 d\pi_3,$$
$$d(\delta\pi_2) - \delta(d\pi_2) = \gamma_{i2k}\delta\pi_i d\pi_k = 0,$$
$$d(\delta\pi_3) - \delta(d\pi_3) = \gamma_{i3k}\delta\pi_i d\pi_k = -\operatorname{tg} q_2\delta\pi_3 d\pi_2 + \operatorname{tg} q_2\delta\pi_2 d\pi_3.$$

Отсюда

$$\gamma_{213} = -\gamma_{312} = 1, \quad \gamma_{233} = -\gamma_{332} = \operatorname{tg} q_2.$$

Остальные γ равны нулю. Найдем теперь производные от T^* по $\dot\pi_1$, $\dot\pi_2$, $\dot\pi_3$:

$$\frac{\partial T^*}{\partial\dot\pi_1} = I_x\dot\pi_1, \quad \frac{\partial T^*}{\partial\dot\pi_2} = I_2\dot\pi_2, \quad \frac{\partial T^*}{\partial\dot\pi_3} = I_3(q_2)\dot\pi_3.$$

Далее находим

$$\frac{\partial T^*}{\partial\pi_1} = \sum_{\nu=1}^{3} b_{\nu 1}\frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} = 0,$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial\pi_2} = \sum_{\nu=1}^{3} b_{\nu 2}\frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} = \frac{\partial T^*}{\partial q_2} = \frac{1}{2}\dot\pi_3^2\frac{\partial I_3}{\partial q_2},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial\pi_3} = \sum_{\nu=1}^{3} b_{\nu 3}\frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} = 0.$$

Уравнениями движения в квазикоординатах будут

$$\frac{d}{dt}\left(I_x\dot{\pi}_1\right) = P_1 = M_x,$$

$$\frac{d}{dt}\left(I_2\dot{\pi}_2\right) - \frac{1}{2}\dot{\pi}_3^2 - \frac{\partial I_3}{\partial q_2} + I_x\dot{\pi}_1\dot{\pi}_3 + \operatorname{tg} q_2 I_3(q_2)\dot{\pi}_3^2 = P_2 = M_{y'},$$

$$\frac{d}{dt}\left[I_3(q_2)\dot{\pi}_3\right] - I_x\dot{\pi}_1\dot{\pi}_2 - \operatorname{tg} q_2 I_3(q_2)\dot{\pi}_2\dot{\pi}_3 = P_3 = M_z.$$

Переходя к обобщенным координатам, получим

$$I_x\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right) = M_x,$$

$$I_2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\dot{\psi}^2\cos^2\theta\frac{dI_3}{d\theta} + I_x\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + \sin\theta I_3(\theta)\dot{\psi}^2\cos\theta = M_y,$$

$$\frac{d}{dt}\left[I_3(\theta)\dot{\psi}\cos\theta\right] - I_x\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\theta} - \sin\theta I_3(\theta)\dot{\psi}\dot{\theta} = M_z.$$

Так как

$$\frac{dI_3}{d\theta} = 2\left(I_{\text{н}z_1} + I_{\text{в}x}\right)\operatorname{tg}\theta\cdot\sec\theta,$$

то окончательно будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left[I_x\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right)\right] = M_x,$$

$$(I_{\text{в}x} + I_z)\ddot{\theta} + I_x\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + (I_{\text{в}z} + I_z - I_{\text{в}x})\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta = M_y,$$

$$\left[I_{\text{н}z_1} + I_{\text{в}z} + I_z + (I_{\text{в}x} - I_{\text{в}z} - I_z)\sin^2\theta\right]\ddot{\psi} -$$
$$- I_x\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\theta}\cos\theta - 2(I_{\text{в}z} + I_z - I_{\text{в}x})\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = M_z\cos\theta.$$

Так как $\delta A = M_x\delta\varphi + M_y\delta\theta + M_{z_1}\delta\psi$, где M_{z_1} — момент всех сил относительно неподвижной оси Oz_1, и, кроме того,

$$\delta\varphi = \delta q_3 = \delta\pi_1 + \operatorname{tg}\theta\,\delta\pi_3,$$
$$\delta\theta = \delta q_2 = \delta\pi_2,\quad \delta\psi = \delta q_1 = \sec\theta\,\delta\pi_3,$$

то

$$\delta A = M_x\delta\pi_1 + M_y\delta\pi_2 + \left(M_x\operatorname{tg}\theta + M_{z_1}\sec\theta\right)\delta\pi.$$

С другой стороны,

$$\delta A = M_x\delta\pi_1 + M_y\delta\pi_2 + M_z\delta\pi_3;$$

следовательно,

$$M_z = M_{z_1}\sec\theta + M_x\operatorname{tg}\theta,$$

или

$$M_z\cos\theta = M_{z_1} + M_x\sin\theta.$$

В гироскопических приборах обычно $M_x = 0$. Тогда

$$\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta = \Omega = \text{const},$$

и уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе будут иметь вид

$$(I_{\text{в}x}+I_z)\ddot{\theta}+I_x\Omega\dot{\psi}\cos\theta+(I_{\text{в}z}+I_z-I_{\text{в}x})\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta=M_y,$$

$$\left[I_{\text{н}z_1}+I_{\text{в}z}+I_z+(I_{\text{в}z}-I_{\text{в}x}-I_z)\sin^2\theta\right]\ddot{\psi}-I_x\Omega\dot{\theta}\cos\theta-$$
$$-2(I_{\text{в}z}+I_z-I_{\text{в}x})\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta=M_{z_1}.$$

В современных гироскопических приборах угловая скорость собственного вращения ротора $\dot{\varphi}$ много больше угловых скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$. Принимая это во внимание и считая угол θ малым, получим

$$(I_{\text{в}x}+I_z)\ddot{\theta}+I_x\Omega\dot{\psi}=M_y,\qquad \left(I_{\text{н}z_1}+I_{\text{в}z}+I_z\right)\ddot{\psi}-I_x\Omega\dot{\theta}=M_{z_1}.$$

Эти уравнения называются «техническими уравнениями» движения гироскопа в кардановом подвесе.

§ 3.8. Уравнения движения системы материальных точек с неудерживающими кинематическими связями

В основе традиционного деления механических систем на голономные и неголономные лежит предположение, что связи, ограничивающие движение системы, остаются неизменными, т. е. сохраняются в течение всего времени. Однако существует большой класс систем, при движении которых это условие не выполняется. Так, например, при качении колес без скольжения, описываемом уравнением кинематической связи, которая является неинтегрируемой, колесный экипаж является неголономной системой, а при качении колес со скольжением — уже голономной системой. В общем случае такую машину, которая может двигаться и в том и в другом режиме, можно назвать *системой с неудерживающими кинематическими связями* [42]. Перед теорией движения систем с неудерживающими связями возникают две основные задачи:

1. Составить уравнения движения в такой форме, которая была бы пригодна для описания движения системы с качением в двух режимах — как при качении без скольжения, так и при качении со скольжением.

2. Установить условия перехода от одного режима движения к другому.

Первая задача решается, если воспользоваться уравнениями в квазикоординатах (3.98). В самом деле, пусть качение колес без скольжения отображается $n-m$ уравнениями неголономных связей

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ls}\dot{q}_s+a_l=0\qquad (l=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n). \tag{3.103}$$

Введем квазикоординаты π_1, π_2, ..., π_n при помощи соотношений (3.92) так, чтобы правые части последних $n-m$ соотношений (3.92) совпадали с левыми частями уравнений (3.103). Введем

функцию $T^*(q, \dot{\pi}, t)$, которая получается из выражения кинетической энергии системы $T(q, \dot{q}, t)$, составленной без учета уравнений неголономных связей (3.103), после исключения всех $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ при помощи соотношений (3.92).

Тогда уравнения движения системы с неудерживающими кинематическими связями имеют вид (3.98). В самом деле, если системой с неудерживающими кинематическими связями является система с качением (например, колесный экипаж), то уравнения (3.98) описывают ее движение в общем случае: как при качении без скольжения, так и со скольжением. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить, что кинематические характеристики $\dot{\pi}_{m+1}, \dot{\pi}_{m+2}, \ldots, \dot{\pi}_n$ представляют компоненты скоростей скольжения. Таким образом, если осуществляется качение со скольжением, то уравнения кинематических связей (3.103) отсутствуют, и кинематические характеристики $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_n$ могут принимать любые значения. Для их определения как функций времени имеем уравнения (3.98), которые вместе с соотношениями (3.92) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений для $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_n$.

Если же осуществляется качение без скольжения, то в силу выполнения уравнений (3.103) кинематические характеристики $\dot{\pi}_{m+1} = \dot{\pi}_{m+2} = \ldots = \dot{\pi}_n = 0$. Движение без скольжения описывают первые m уравнений системы (3.98), в которых после выполнения всех указанных там операций следует положить $\dot{\pi}_{m+1} = \dot{\pi}_{m+2} = \ldots = \dot{\pi}_n = 0$. Не останавливаясь на подробностях, которые читатель может найти в работе [42], перейдем ко второму вопросу теории движения систем с неудерживающими кинематическими связями: к отысканию условий перехода от качения без скольжения к качению со скольжением, а также условий обратного перехода. Для этого обратимся к фазовому пространству рассматриваемой системы и выясним особенности его структуры. В случае движения со скольжением состояние системы в каждый момент времени t определяется $2n$ величинами: n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и n кинематическими характеристиками $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_n$. Следовательно, уравнения (3.92) и (3.98) описывают движение изображающей точки в расширенном *) фазовом пространстве $\Phi(q, \dot{\pi}, t)$, число измерений которого равно $2n + 1$.

Уравнения (3.103), отображающие качение системы без скольжения, можно рассматривать в фазовом пространстве как

*) Если к пространству конфигураций или к фазовому пространству добавляют еще одну ось, по которой откладывают время, то пространство конфигураций или фазовое пространство называется *расширенным*.

уравнения некоторой гиперплоскости П размерности $n+m+1$

$$\dot{\pi}_{m+1}=0,\ \dot{\pi}_{m+2}=0,\ \ldots,\ \dot{\pi}_n=0. \tag{3.104}$$

Отсюда следует, что при качении без скольжения изображающая точка перемещается в расширенном фазовом пространстве Ф по гиперплоскости (3.104) согласно уравнениям движения (3.98), составленным лишь для первых квазикоординат $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$, и соотношениям (3.92) и (3.104).

Пусть системой с качением является колесный экипаж, тогда гиперплоскость П представляет пересечение гиперплоскостей-ветвей $\Pi^1, \Pi^2, \ldots, \Pi^r$, число r которых определяется числом и схемой расположения колес. Движение изображающей точки по одной из ветвей $\Pi^1, \Pi^2, \ldots, \Pi^r$ соответствует качению без скольжения одного колеса (или нескольких колес), а движение по гиперплоскости П — качению без скольжения всех колес одновременно.

Рассмотрим особенность структуры фазового пространства Ф при наличии ветви Π^s в случае, когда все колеса жесткие, а их взаимодействие с опорной плоскостью осуществляется силами сухого трения, подчиняющимися закону Кулона — Амонтона. Пусть ради определенности ветвь Π^s соответствует качению без скольжения s-го колеса. Если в силу наложенных на систему связей s-е колесо вынуждено катиться так, что боковое (или продольное) скольжение отсутствует, то вектор $\mathbf{v}_s$ скорости скольжения колеса будет иметь только одну компоненту, которую обозначим $\dot{\pi}_s$. В этом случае гиперплоскость Π^s $(\dot{\pi}_s=0)$ разделит фазовое пространство Ф на две области: Φ_+ $(\dot{\pi}_s>0)$ и Φ_- $(\dot{\pi}_s<0)$.

Согласно закону Кулона — Амонтона сила трения скольжения в области Φ_+ принимает некоторое значение, зависящее от нормальной реакции опорной плоскости на s-е колесо, а в области Φ_- — такое же значение, но с обратным знаком. Следовательно, уравнения (3.98), описывающие движение изображающей точки в Φ_+ и в Φ_-, будут различными. Решения уравнений (3.98) при переходе из одной области в другую должны «сшиваться» по непрерывности фазовых переменных.

Здесь могут встретиться два случая: 1) изображающая точка при своем движении в Φ_+ или в Φ_- пересекает граничную гиперплоскость П, не задерживаясь на ней; этот случай соответствует сохранению качения s-го колеса со скольжением, но с мгновенной сменой знака скорости скольжения; 2) изображающая точка, придя на гиперплоскость Π^s, в дальнейшем остается на ней, двигаясь согласно уравнениям (3.98), составленным для квазикоординат $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{s-1}, \pi_{s+1} \ldots, \pi_n$, в которых принято во внимание равенство $\dot{\pi}_s=0$.

Однако указанное движение изображающей точки на гиперплоскости Π^s реализуется лишь в области G^s гиперплоскости Π^s, которая является устойчивой относительно отклонений от Π^s. Необходимым и достаточным условием устойчивости области G^s является такое расположение фазовых траекторий в малой окрестности гиперплоскости Π^s, при котором изображающая точка, двигаясь по этим траекториям, приходит на гиперплоскость Π^s как из области Φ_-, так и из области Φ_+ фазового пространства Φ. Будем называть такое расположение стыковкой фазовых траекторий. Таким образом, связная область стыковки фазовых траекторий и определяет область G^s на гиперплоскости Π^s. Отсюда следует, что условием перехода s-го колеса от качения со скольжением к качению без скольжения является попадание изображающей точки в область G^s гиперплоскости Π^s.

Граница Γ^s области G^s будет содержать Γ^s_+ и Γ^s_-. Если, двигаясь в области G^s, изображающая точка достигает границы Γ^s_+, то затем изображающая точка переходит в область Φ_+, а после достижения границы Γ^s_- — в область Φ_-. И в том и в другом случае получаем условие перехода от качения без скольжения к качению со скольжением.

Из сказанного следует, что отыскание границ области G^s полностью решает задачу определения условий перехода качения колеса без скольжения к качению со скольжением, а также условия обратного перехода.

Математическое определение области G^s в рассматриваемом случае одной компоненты скорости скольжения сводится к одновременному выполнению двух неравенств:

$$\lim_{\dot{\pi}_s \to +0} \ddot{\pi}_s \leqslant 0, \qquad \lim_{\dot{\pi}_s \to -0} \ddot{\pi}_s \geqslant 0. \tag{3.105}$$

Пусть $\ddot{\pi}_s = f_s(\dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_{s-1}, \dot{\pi}_s, \dot{\pi}_{s+1}, \ldots, \dot{\pi}_n, N_s) \leqslant 0$ — уравнение системы (3.98), составленное для квазикоординаты π_s, где N_s — нормальная реакция, испытываемая s-м колесом. Тогда неравенства (3.105) запишутся в виде

$$\begin{gathered} f_s(\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_{s-1}, 0, \dot{\pi}_{s+1}, \ldots, \dot{\pi}_n, N_s) \leqslant 0, \\ f_s(\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_{s-1}, 0, \dot{\pi}_{s+1}, \ldots, \dot{\pi}_n, -N_s) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.106}$$

Обращение (3.106) в равенство дает уравнение границ Γ^s_+ и Γ^s_- области G^s на гиперплоскости Π^s.

При качении жесткого колеса в общем случае вектор $\mathbf{v}_s$ скорости скольжения имеет две компоненты — продольную $\dot{\pi}_s$ и поперечную $\dot{\pi}_{s+1}$. Рассмотрим трехмерное сечение Φ_3 фазового про-

странства Ф, откладывая по оси абсцисс величину $\dot{\pi}_s$, по оси ординат — величину $\dot{\pi}_{s+1}$, а в качестве аппликаты взяв, например, угловую скорость ω_s собственного вращения колеса. Гиперплоскостью Π^s в Φ_3 будет прямая $\dot{\pi}_s = \dot{\pi}_{s+1} = 0$, т. е. ось ω_s. Введем цилиндрическую систему координат v_s, ϑ_s, ω_s посредством соотношений $\dot{\pi}_s = v_s \cos \vartheta_s$, $\dot{\pi}_{s+1} = \pi_s \sin \vartheta_s$ и запишем уравнения движения в новых фазовых переменных v_s, ϑ_s, ω_s. Пусть для v_s уравнение движения имеет вид $\dot{v}_s = F_s(v_s, \vartheta_s, \omega_s, \ldots)$. Из условия стыковки фазовых траекторий на оси ω_s приходим к неравенству $\dot{v}_s \leqslant 0$ при $v_s \to 0$. Отсюда следует, что область G^s на оси ω_s выделяется неравенством

$$F_s(0, \vartheta_s, \omega_s, \ldots) \leqslant 0, \tag{3.107}$$

которое должно выполняться для всех значений ϑ_s в интервале $0 \leqslant \vartheta_s \leqslant 2\pi$. Поскольку левая часть неравенства (3.107) содержит и все остальные фазовые переменные, которые при рассмотрении трехмерного сечения Φ_3 считались фиксированными, обращение (3.107) в равенство дает уравнение границы Γ^s области G^s на гиперповерхности Π^s в фазовом пространстве Ф.

Переход к качению без скольжения и в этом случае соответствует попаданию изображающей точки в область G^s гиперплоскости Π^s, а переход к качению со скольжением — к приходу изображающей точки в области G^s к границе Γ^s. Однако особенность этого случая состоит в том, что изображающая точка пересечет границу Γ^s при определенном значении угла ϑ_s, характеризующем направление скорости скольжения колеса начинающегося качения со скольжением. При качении же без скольжения движение изображающей точки в области G^s на гиперплоскости Π^s в этом случае описывается уравнениями (3.98), составленными для квазикоординат $\pi_1, \ldots, \pi_{s-1}, \pi_{s+2}, \ldots, \pi_n$ с учетом равенств $\dot{\pi}_s = \dot{\pi}_{s+1} = 0$.

Пример 3.20. Составим уравнения движения мотоцикла с учетом возможности бокового скольжения колес при следующих упрощающих предположениях: масса жестких колес пренебрежимо мала по сравнению с массой седока и рамы, которые будем считать единым твердым телом с массой m и главными центральными моментами инерции A и B. Скорость v продольного движения мотоцикла и угол ψ поворота руля — заданные функции времени. Будем рассматривать лишь такие движения, при которых величина ψ, угол наклона рамы χ, скорость u поперечного смещения центра масс, проекции ω_1, ω_2 мгновенной угловой скорости вращения тела на главные направления центрального эллипсоида инерции — достаточно малы. Кроме вышеупомянутых, введем следующие обобщенные координаты: x, y — декартовы координаты точки соприкосновения заднего колеса мотоцикла с опорной плоскостью и угол θ между линией пересечения средней (продольной) плоскости с опорной плоскостью и осью x.

Введем квазикоординаты $\pi_1, \ldots, \pi_5$ при помощи соотношений

$$\dot{\pi}_1 \equiv u_C = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta - h_C\dot{\chi} + l\dot{\theta},$$

$$\dot{\pi}_2 \equiv v_C = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + h_C\chi\dot{\theta} + \frac{c_1 h}{c}(\psi\sin\lambda - \chi)\dot{\psi} - \frac{c_1 h}{c}\psi\dot{\chi}, \quad (3.108)$$

$$\dot{\pi}_3 \equiv \omega_1 = \dot{\chi}\cos\alpha + \dot{\theta}\sin\alpha,$$

$$\dot{\pi}_4 \equiv \omega_2 = -\dot{\chi}\sin\alpha + \dot{\theta}\cos\alpha,$$

$$\dot{\pi}_5 = \dot{\psi},$$

где u_C, v_C — компоненты скорости центра масс, а остальные обозначения

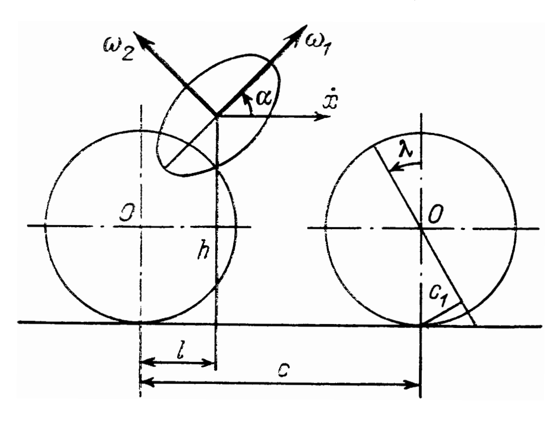


Рис. 3.20

указаны на рис. 3.20. Составляя перестановочные соотношения, находим выражения коэффициентов γ_{ijk}

$$\gamma_{123} = -\gamma_{321} = \gamma_{312} = -\gamma_{213} = \sin\alpha, \quad \gamma_{124} = -\gamma_{421} = \gamma_{412} = -\gamma_{214} = \cos\alpha,$$

$$\gamma_{314} = -\gamma_{413} = \frac{c_1 h}{c}\psi, \quad \gamma_{513} = -\gamma_{315} = \frac{c_1 h}{c}(\psi\sin\lambda - \chi)\sin\alpha,$$

$$\gamma_{514} = -\gamma_{415} = \frac{c_1 h}{c}(\psi\sin\lambda - \chi)\cos\alpha.$$

При сделанных упрощающих предположениях кинетическая энергия мотоцикла с седоком записывается в виде

$$T^* = \frac{1}{2}m\left(\dot{\pi}_1^2 + \dot{\pi}_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(A\dot{\pi}_3^2 + B\dot{\pi}_4^2\right),$$

а потенциальная энергия определяется выражением

$$\Pi = -mg\left[\frac{1}{2}h_C\chi^2 + \frac{c_1 l}{c}\psi\left(\frac{1}{2}\psi\sin\lambda - \chi\right)\right].$$

Согласно этим выражениям уравнения (3.98), линеаризованные относительно малых величин и описывающие движение управляемого мотоцикла при

боковом скольжении обоих колес, имеют вид

$$
\begin{aligned}
m\dot{u} &= -mv(\omega_1 \sin\alpha + \omega_2 \cos\alpha) + F_1 + F_2,\\
A\dot{\omega}_1 &= H\cos\alpha + M_1F_1 + K_1F_2, \qquad (3.109)\\
B\dot{\omega}_2 &= -H\sin\alpha - M_2F_1 - K_2F_2,\\
\dot{\chi} = \omega_1\cos\alpha - \omega_2\sin\alpha, &\quad H = mg\left(h\chi - \frac{c_1 l}{c}\,\psi\right).
\end{aligned}
$$

Здесь F_1, F_2 — боковые реакции дороги на заднее и соответственно переднее колесо мотоцикла в точках контакта колес с дорогой. Считая их силами сухого трения, имеем

$$F_{1,2} = -fN_{1,2}\,\mathrm{sign}\,u_{1,2}, \qquad (3.110)$$

если $u_{1,2} \neq 0$, и любое значение в интервале $-fN_{1,2} < F_{1,2} < fN_{1,2}$, если $u_{1,2} = 0$; f — коэффициент трения скольжения; $N_1 = mglc^{-1}$, $N_2 = mg(c-l)c^{-1}$ — нормальные реакции на колеса со стороны опорной плоскости; u_1, u_2 — скорости бокового скольжения заднего и соответственно переднего колеса мотоцикла, определяемые выражениями

$$
\begin{gathered}
u_1 = u + M_1\omega_1 - M_2\omega_2, \quad u_2 = u + K_1\omega_1 - K_2\omega_2 - \Psi,\\
\Psi = c_1\dot{\psi} - v\psi\cos\lambda, \quad M_1 = h\cos\alpha - l\sin\alpha,\\
K_1 = h\cos\alpha + (c-l)\sin\alpha,\\
M_2 = h\sin\alpha + l\cos\alpha, \quad K_2 = h\sin\alpha - (c-l)\cos\alpha.
\end{gathered}
$$

Уравнения (3.109) описывают движение изображающей точки в четырехмерном фазовом пространстве $\Phi_1(u, \chi, \omega_1, \omega_2)$.

Рассмотрим другие возможные режимы движения мотоцикла.

Скользит только заднее колесо. В этом случае изображающая точка движется в фазовом пространстве Φ на гиперплоскости $u_2 = 0$ согласно уравнениям (3.109), из которых следует исключить неизвестную величину F_2 и воспользоваться соотношением

$$u_2 \equiv u + K_1\omega_1 - K_2\omega_2 - \Psi = 0.$$

Движение на гиперплоскости $u_2 = 0$ реализуется в области G^2, определяемой неравенствами $\lim\limits_{u_2\to+0} \dot{u}_2 \leqslant 0$, $\lim\limits_{u_2\to-0} \dot{u}_2 \geqslant 0$ или

$$
\begin{aligned}
&H\left(A^{-1}K_1\cos\alpha + B^{-1}K_2\sin\alpha\right) + F_1\left(m^{-1} + A^{-1}M_1K_2 + B^{-1}M_2K_2\right) -\\
&\quad - fN_2\left(m^{-1} + A^{-1}K_1^2 - B^{-1}K_2^2\right) - \dot{\Psi} - v\left(\omega_1\sin\alpha + \omega_2\cos\alpha\right) \leqslant 0, \qquad (3.111)
\end{aligned}
$$

где F_1 определяется выражением (3.110). Второе неравенство, выделяющее область G^2, получается из (3.111) заменой N_2 на $-N_2$ и знака $\leqslant$ на знак $\geqslant$.

В том случае, когда скользит только переднее колесо, уравнения движения и условия реализации этого режима качения находятся аналогично.

В случае, когда оба колеса катятся без скольжения, изображающая точка движется в области, являющейся пересечением гиперплоскостей $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$ согласно уравнению движения

$$
\begin{gathered}
cI_1\ddot{\chi} - mgch\chi - c_1I_{12}\ddot{\psi} - (I_{12}\cos\lambda + mc_1h)v\dot{\psi} +\\
+ (mgc_1l - mhv^2\cos\lambda - I_{12}\dot{v}\cos\lambda)\psi = 0,\\
I_1 = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + mh^2, \quad I_{12} = (B-A)\sin\alpha\cos\alpha + mhl.
\end{gathered}
$$

Этот режим движения реализуется при одновременном выполнении четырех неравенств типа (3.111), в которых

$$F_1 = c^{-2}h^{-1}I_1^{-1}\{[I_{12}(BK_1 \sin\alpha - AK_2\cos\alpha) - \\ - I_1(AK_2 \sin\alpha + BK_1\cos\alpha)]\ddot{\Psi} + mhv(BK_1\sin\alpha - AK_2\cos\alpha)\Psi - \\ - cH[I_1(c-l) + AK_2\cos\alpha - BK_1\sin\alpha]\},$$

$$F_2 = c^{-2}h^{-1}I_1^{-1}\{[I_{12}(AM_2\cos\alpha - BM_1\sin\alpha) + \\ + I_1(AM_2\sin\alpha + BM_1\cos\alpha)]\ddot{\Psi} + mhv(AM_2\cos\alpha - BM_1\sin\alpha)\Psi + \\ + cH(AM_2\cos\alpha - BM_1\sin\alpha - lI_1)\}.$$

§ 3.9. Уравнения Лагранжа — Максвелла. Функция Релея

При описании движения электромеханической системы, кроме сил, имеющих своим происхождением гравитационное поле, или сил контактного происхождения, может оказаться, что материальные точки системы несут электрические заряды или токи, что приведет к возникновению дополнительных сил взаимодействия электромагнитного характера.

Для учета этого дополнительного взаимодействия Максвеллом [18] было высказано утверждение, получившее впоследствии название *постулата Максвелла*, основанием которого послужила глубокая аналогия между механическими движениями и процессами в электрических цепях. В самом деле, рассмотрим простейший процесс гармонических колебаний в механике и в колебательном контуре. Как известно, малые колебания грузика на пружине описываются уравнением

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{3.112}$$

Уравнение (3.112) записывается в форме уравнений Лагранжа второго рода (3.25), если в качестве «механической» кинетической энергии принять $T_м = {}^1/_2 m\dot{x}^2$, в качестве «механической» потенциальной энергии $П_м = {}^1/_2 kx^2$ (здесь k — жесткость пружины, отсчет положения грузика производится от положения пружины в расслабленном состоянии, рис. 3.21), а «механической» функцией Лагранжа является $L_м = {}^1/_2 m\dot{x}^2 - {}^1/_2 kx^2$.

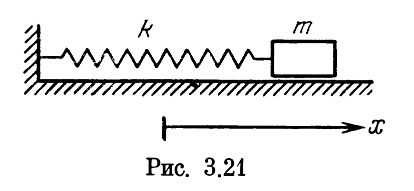


Рис. 3.21

Уравнение, описывающее изменение заряда q на обкладках конденсатора в колебательном контуре, изображенном на рис. 3.22 (L — коэффициент самоиндукции, C — емкость конденсатора, i — мгновенное значение тока в контуре), определяется законом Кирхгофа:

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0. \tag{3.113}$$

Уравнение (3.113) тоже записывается в форме уравнений Лагранжа второго рода, если, принимая во внимание естественное соотношение $i = dq/dt$, «электрической» кинетической энергией считать энергию

$$W_L = T_э = \frac{1}{2} L\dot{q}^2,$$

содержащуюся в катушке с током i, и «электрической» потенциальной энергией — энергию

$$W_C = \Pi_э = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C},$$

запасенную в конденсаторе с зарядом q. Таким образом, в качестве обобщенной «электрической» координаты целесообразно принять заряд q на обкладках конденсатора, а при отсутствии конденсатора — количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время t, т. е. величину

$$q = \int_0^t i\,dt.$$

Рис. 3.22

П о с т у л а т М а к с в е л л а. *Уравнения движения электромеханической системы составляются в форме уравнений Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа L, которая является суммой $L_м$ и $L_э$.*

В этой формулировке предполагается, что все силы потенциальны. При наличии непотенциальных сил уравнения движения записываются в обычной форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad T = T_м + T_э, \quad Q_i = Q_{мi} + Q_{эi}. \quad (3.114)$$

Для выяснения физической природы «электрической» обобщенной силы $Q_{эi}$ вспомним, что мощность, подводимая к электрической цепи $N_э = Ei$, где E — электродвижущая сила, создаваемая «сторонними» источниками энергии, а i — возникающий при этом в цепи электрический ток. Поскольку $N = dA/dt$, $i = dq/dt$, предыдущее соотношение эквивалентно $dA_э = E\,dq$ или $\delta A_э = E\,\delta q$. Отсюда непосредственно следует, что «электрическое» виртуальное перемещение эквивалентно бесконечно малому «пробному» изменению заряда, а «электрической» обобщенной силой $Q_{эi}$ является э. д. с. внешних источников энергии.

П р и м е р 3.21. *Уравнения, описывающие работу электромагнитного прибора.* Рассмотрим электромеханическую систему, используемую в качестве электроизмерительного прибора. Он состоит из неподвижной катушки, последовательно соединенной с вращающейся катушкой так, что при отсутствии внешней э. д. с. магнитные оси катушек перпендикулярны, что поддерживается возвратной пружиной (рис. 3.23).

Пусть I — момент инерции вращающейся катушки, L_1, L_2 — коэффициенты самоиндукции неподвижной и подвижной катушек, $M(\alpha)$ — коэффициент взаимоиндукции, зависящий от угла α между их магнитными осями, k — жесткость возвратной пружины, E — э. д. с., подключаемая к клеммам

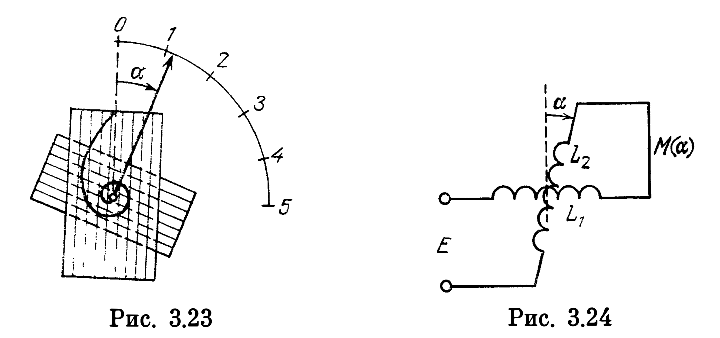


Рис. 3.23 Рис. 3.24

электромагнитного прибора. Если i — ток, протекающий в цепи из двух последовательно соединенных катушек, то в качестве обобщенной электрической координаты выберем

$$q = \int_0^t i\,dt,$$

а в качестве механической координаты — угол α поворота катушки L_2 (рис. 3.24). При составлении функции Лагранжа L нетрудно заметить, что

$$L_{\text{м}} = T_{\text{м}} - \Pi_{\text{м}} = \frac{1}{2} I\dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} k\alpha^2.$$

Для составления $L_{\text{э}} = T_{\text{э}} - \Pi_{\text{э}}$ необходимо вспомнить, что магнитная энер-

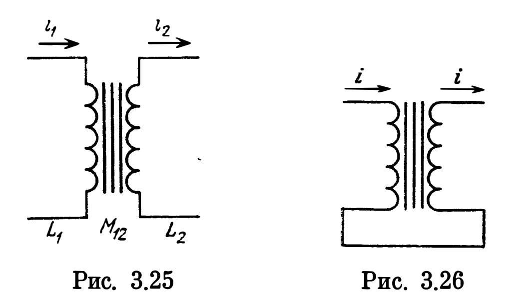


Рис. 3.25 Рис. 3.26

гия трансформатора с током i_1 в первичной обмотке и с током i_2 во вторичной обмотке (рис. 3.25) записывается в виде

$$W_L = \frac{1}{2}\left(L_1 i_i^2 + 2M_{12} i_1 i_2 + L_2 i_2^2\right). \tag{3.115}$$

Поскольку рассматриваемый электромагнитный прибор по способу электрического соединения представляет трансформатор, у которого первичная и вторичная обмотки соединены последовательно (рис. 3.26), кинетическая электрическая энергия прибора согласно (3.115) запишется в виде

$$T_{\text{э}} = \frac{1}{2}\left[L_1 + 2M(\alpha) + L_2\right]\dot{q}^2.$$

Потенциальную электрическую энергию вычислять не нужно, так как конденсаторов в системе нет. Из обобщенных сил присутствует лишь $Q_q = E$.

Составляя уравнения Лагранжа — Максвелла

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2),$$

где $q_1 = \alpha$, $q_2 = q$, с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} I\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}[L_1 + 2M(\alpha) + L_2]\,\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k\alpha^2,$$

получаем уравнения движения электромагнитного прибора

$$I\ddot{\alpha} + k\alpha - \frac{dM(\alpha)}{d\alpha}\dot{q}^2 = 0,$$

$$[L_1 + 2M(\alpha) + L_2]\,\ddot{q} + 2\frac{dM(\alpha)}{d\alpha}\dot{\alpha}\,\dot{q} = E. \tag{3.116}$$

Обычно зависимость коэффициента взаимоиндукции M от угла α поворота катушки близка к синусоидальной кривой. Для малых углов α эту зависимость можно принять линейной, т. е. $M = b\alpha$ ($b = \text{const}$), поэтому, возвращаясь к обозначению $dq/dt = i$, запишем уравнения (3.116) в виде

$$I\ddot{\alpha} + k\alpha - bi^2 = 0, \quad [L_1 + 2M(\alpha) + L_2]\frac{di}{dt} + 2b\dot{\alpha}i = E. \tag{3.117}$$

Анализ этих уравнений показывает, что на вращательное движение катушки влияет дополнительный момент bi^2 пондеромоторных сил, а на протекание тока в электрической цепи — дополнительная э. д. с. индукции — $2b\dot{\alpha}i$, обусловленная движением проводника с током в магнитном поле. Для определения значений α_0, i_0 в состоянии покоя приравняем нулю все производные по времени в уравнениях (3.117), после чего получим $\alpha_0 = \frac{b}{k}i_0^2$, $E = 0$. Из первого соотношения следует, что угол отклонения стрелки прибора пропорционален квадрату протекающего тока; это подтверждает хорошо известный экспериментальный факт: шкалы всех электромагнитных приборов квадратичны. Однако второе соотношение ($E = 0$) является, на первый взгляд, необъяснимым, потому что, вообще говоря, $E \neq 0$, и э. д. с. E является произвольно задаваемой величиной. Это противоречие объясняется тем, что все электрические проводники обладают омическим сопротивлением, не учтенным в решении этой задачи. По своему характеру омическое сопротивление подобно действию сил вязкого трения при механическом движении, поэтому рассмотрим этот вопрос в общей постановке.

Пусть система N материальных точек движется в вязкой среде. Тогда на каждую материальную точку действует сила вязкого трения $\mathbf{F}_\nu^{\text{тр}}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$), равная, по определению, $\mathbf{F}_\nu^{\text{тр}} = -h_\nu \mathbf{v}_\nu$, где h_ν — коэффициент вязкого трения, $\mathbf{v}_\nu$ — скорость движения материальной точки относительно среды. Согласно формуле (1.34)

$$Q_i^{\text{тр}} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu^{\text{тр}} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = -\sum_{\nu=1}^{N} h_\nu \mathbf{v}_\nu \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} h_\nu v_\nu^2\right) = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i},$$

где введена *функция Релея*

$$R = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} h_\nu v_\nu^2,$$

называемая еще *функцией диссипации* (или *рассеяния*) *энергии*. Обычно функция Релея берется в виде половины мощности рассеяния, т. е. $R = \frac{1}{2} N$. В самом деле, элементарная работа сил вязкого трения

$$d'A = \sum_{\nu=1}^{N} h_\nu \mathbf{v}_\nu \, d\mathbf{r}_\nu,$$

отсюда

$$N = \frac{dA}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} h_\nu v_\nu^2.$$

Возвращаясь к уравнениям Лагранжа — Максвелла, мы видим, что учет сил вязкого трения и, следовательно, омического сопротивления в электрических проводниках сводится к добавлению к правой части уравнений Лагранжа — Максвелла члена $-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\nu}$, где функция Релея $R = \frac{1}{2} N$; мощность потерь механической энергии из-за наличия сил вязкого трения вычисляется по формуле

$$N_\text{м} = \sum_{\nu=1}^{N} h_\nu v_\nu^2,$$

а мощность электрических потерь из-за омического сопротивления в проводниках — по формуле

$$N_\text{э} = \sum_{\mu=1}^{M} R_\mu i_\mu^2,$$

где M — число омических проводников.

В результате уравнения Лагранжа — Максвелла с учетом сил вязкого трения и омического сопротивления в проводниках записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.118}$$

Здесь функция Лагранжа $L = L_\text{м} + L_\text{э}$ представляет согласно постулату Максвелла сумму функции $L_\text{м}$, составленной для механической части системы, и функции $L_\text{э}$, составленной для электрической части системы, которая образует в целом сложную электромеханическую систему. Обобщенные силы Q_i находятся,

как обычно, в результате вычисления виртуальной работы заданных сил, а функция Релея определяется, исходя из выражения

$$R = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} h_\nu v_\nu^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{M} R_\mu i_\mu^2. \qquad (3.119)$$

Заметим, что уравнения (3.118), наряду с известными уравнениями Кирхгофа, позволяют составлять уравнения, описывающие процессы и в чисто электрических цепях, о чем свидетельствует приводимый ниже пример из области радиотехники.

Пример 3.22. На рис. 3.27 изображен входной каскад транзисторного радиоприемника, где в качестве активного элемента использован полевой транзистор в схеме с общим истоком. Такой транзистор обладает высоким входным сопротивлением, что для входного каскада представляется весьма удобным. Принцип работы усилителя на полевом транзисторе такой же, как и лампового усилителя. Роль управляющей сетки в полевом транзисторе выполняет затвор (см. рис. 3.27). Под воздействием входного напряжения $u_{зи}$, приложенного к затвору, изменяется величина тока, протекающего по каналу сток — исток.

Рис. 3.27

Для составления уравнений, описывающих электромагнитные процессы в рассматриваемой схеме, введем контурные токи i_1, i_2, i_3, показанные на рис. 3.27, и тем самым обобщенные координаты

$$q_1 = \int_0^t i_1 dt, \quad q_2 = \int_0^t i_2\, dt, \quad q_3 = \int_0^t i_3\, dt.$$

В этих переменных функции $T_э$, $П_э$, $R_э$ имеют вид

$$T_э = \frac{1}{2}\left(L_1 \dot q_1^2 + 2M\dot q_1 \dot q_2 + L_2 \dot q_2^2\right), \quad П_э = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2},$$

$$R_э = \frac{1}{2}\left[R_1 \dot q_1^2 + R_2 \dot q_2^2 + R_3 (\dot q_2 - \dot q_3)^2\right].$$

Обобщенные силы $Q_1 = E_1$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = E_3$. Кроме того, предполагается известной зависимость $i_3 = i_3(u_{зи})$, которая является одной из характеристик транзистора.

Составим уравнения, учитывая, что ток i_3 в цепи затвора пренебрежимо мал по сравнению с токами i_1 и i_2. В этом случае функция Лагранжа $L_э$ и функция Релея $R_э$ рассматриваемой системы имеют вид

$$L_э = \frac{1}{2}\left(L_1 \dot q_1^2 + 2M\dot q_1 \dot q_2 + L_2 \dot q_2^2\right) - \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q_2^2}{2C_2},$$

$$R_э = \frac{1}{2}\left[R_1 \dot q_1^2 + (R_2 + R_3)\, \dot q_2^2\right].$$

Составляя уравнения Лагранжа — Максвелла (3.118), приходим к известным

уравнениям электротехники

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{q_1}{C_1} + M \frac{di_2}{dt} = E_1,$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + (R_2 + R_3) i_2 + M \frac{di_1}{dt} = 0,$$

которые также можно было бы получить, пользуясь законами Кирхгофа.

Уравнения Лагранжа — Максвелла особенно эффективны при описании поведения электромеханических систем, содержащих бесколлекторные электрические машины при их сложном соединении. В применении к единичной электрической машине уравнения Лагранжа — Максвелла позволяют рассмотреть многие вопросы динамики, например, явление «качания» ротора, устойчивость различных режимов движения, характер переходных процессов и др.

§ 3.10. Аналитическая механика и общая теория электрических машин

Рассмотренные в предыдущем параграфе электромеханические системы уже потребовали некоторого изменения математического аппарата для их описания и исследования. Вместе с тем существует обширный класс электромеханических систем, называемых *электрическими машинами*, которые требуют особого подхода [17, 18].

Множество различных конструкций электрических машин и их разнообразное применение в науке, в технике и в быту, начиная с мощных силовых установок и кончая тончайшими прецизионными приборами и механизмами, потребовали создания единой теории таких машин. Эта теория, являющаяся, с одной стороны, частью теоретической электротехники, а с другой стороны — своеобразной главой аналитической механики, получила название *общей динамической теории электрических машин*. В трактовке электрических и механических процессов динамическая теория электрических машин базируется на общих законах динамики электромеханических систем, что и является общим признаком электрических машин и электромеханических систем. Кроме того, созданию общей динамической теории электрических машин способствовали общие идеи теории нелинейных колебаний научной школы Мандельштама — Андронова, которые позволили не только подойти по-новому к традиционным задачам аналитической механики, но и объединить их с новыми актуальными проблемами теории электрических машин.

С динамической точки зрения наиболее простой моделью электрической машины является дискретная модель с обмотками, выполненными из квазилинейных проводников. Такая модель бесколлекторной машины, несмотря на наличие скользящих контактов, описывается уравнениями Лагранжа — Максвелла, причем в качестве обобщенных скоростей, наряду со скоростями механических перемещений, вводятся контурные токи. Если пренебречь сопротивлением контактных колец, то в такой идеализации характерной особенностью бесколлекторных машин является отсутствие переменных омических сопротивлений. Именно благодаря достаточной простоте уравнений движения дискретных моделей бесколлекторных электрических машин они получили достаточно широкое распространение.

С другой стороны, теория *коллекторных машин*, опирающаяся на модель с квазилинейными обмотками, не получила практически никакого распространения. Это можно объяснить тем, что в такой модели коллектор рассматривается как устройство, осуществляющее коммутацию, т. е. скачкообразное изменение величины активных (омических) сопротивлений. По этой причине уравнения движения коллекторной машины оказываются весьма сложными. Таким образом, с точки зрения аналитической механики всякую коллекторную машину можно рассматривать как электромеханическую систему с переменным (зависящим от угла поворота ротора) числом степеней свободы. В качестве простейшей модели коллекторной машины последовательного возбуждения можно привести колесо Барлоу [18], схема которого приведена на рис. 3.28.

φ

$\dot{q}$

Рис. 3.28

Пусть коллектор имеет n пластин; тогда при повороте ротора на угол $\Delta = 2\pi/n$ конфигурация проводников в системе не меняется, и движение можно представить в виде последовательности идентичных циклов. Пусть ширина щетки Δ_1 и зазор ε между двумя коллекторными пластинами таковы, что $\varepsilon < \Delta_1 < 2\Delta - \varepsilon$. Тогда каждый цикл распадается на три этапа: 1) поворот на угол $\Delta - \Delta_1 + \varepsilon$, в течение которого щетка касается только одной коллекторной пластины (одна «электрическая» степень свободы); 2) поворот на угол $\Delta_1 - \varepsilon$, в течение которого щетка перекрывает две пластины (две «электрические» степени свободы); 3) мгновенный разрыв короткозамкнутого витка («ударная» коммутация). Для каждого этапа можно написать уравнения Лагранжа — Максвелла и в результате получить связь между начальными и конечными значениями тока во внешней цепи для k-го цикла. Полученную связь можно рассматривать как уравнение движения в конечных разностях для тока во внешней цепи простейшей модели коллекторной модели.

Аналогичные разностные уравнения получаются и для более сложных схем, например, для коллекторных машин с несколькими обмотками; для цепей, состоящих из нескольких электрических машин, и т. д.

Перейдем теперь к выводу уравнений движения электрической машины, рассматриваемой как распределенная электромеханическая система с закрепленным распределением тока. Для этого пренебрежем членами порядка $\Delta = 2\pi/n \ll 1$ в точных разностных уравнениях движения дискретной модели коллекторной электрической машины (например, колеса Барлоу) и затем усредним полученные уравнения. Фактически эти действия будут означать переход от обмотки из квазилинейных проводников к обмотке в виде сплошного (объемного или поверхностного) проводника (а в случае колеса Барлоу — к сплошному диску с радиальной анизотропной проводимостью), распределение тока в котором определяется положением щетки.

Полученные предельным переходом уравнения движения коллекторной машины соответствуют уравнениям такой модели, в которой ротор и статор трактуются как объемные проводники с закрепленным распределением тока.

Еще в конце девятнадцатого века на примере колеса Барлоу было замечено, что уравнения движения электромеханических систем, содержащих распределенные проводники со скользящими контактами, не записываются в форме уравнений Лагранжа — Максвелла. В связи с этим высказывались предположения, что такие системы являются разновидностью неголономных систем. Однако только в 1952 г. А. В. Гапоновым [17] была внесена ясность в этот вопрос и показано, что присоединение к распределенному (объемному или поверхностному) проводнику скользящего контакта эквивалентно наложению на распределение в нем тока неголономных связей.

Коллекторные электрические машины оказались неголономными системами Чаплыгина (см. гл. 6). В 1955 г. А. В. Гапонов [18] предложил уравнения, которые могут быть положены в основу общей теории электрических машин: коллекторных, бесколлекторных, униполярных и др.

Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^0}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial L^0}{\partial q_r} - \frac{1}{\dot q_r}\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial L^0}{\partial u_{rs}}\dot u_{rs} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, l), \qquad (3.120)$$

где функция L^0 получается из функции Лагранжа L путем использования уравнений неголономных связей, в коэффициентах которых все координаты q_r заменены независимыми параметрами u_{rs}, в силу чего $L^0 = L^0(q_1, q_2, \ldots, q_l, \dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_l, u_{11}, \ldots, u_{ll})$.

В уравнениях Гапонова (3.120) после выполнения указанных в них операций следует положить $u_{rs} = q_r$.

Таким образом, общую теорию электрических машин вполне можно рассматривать как своеобразный раздел аналитической механики. При этом деление электрических машин на бесколлекторные и коллекторные соответствует разделению систем на голономные и неголономные.

Для бесколлекторных машин уравнения (3.120) совпадают с уравнениями Лагранжа — Максвелла. При этом функция Лагранжа L представляет собой сумму «электрической» и «механической» функций Лагранжа $L_э$ и $L_м$, где $L_э$ является магнитной энергией, выраженной через соответствующие переменные. При наличии неголономных связей функция L^0 строится на основе функции Лагранжа — Максвелла L соответствующей освобожденной системы с использованием уравнений неголономных связей.

Иногда для коллекторных машин с равномерными роторными обмотками возможно непосредственное построение функции L^0, о чем свидетельствует приводимый ниже пример.

Пример 3.23. На рис. 3.29 изображена модель коллекторной машины — генератора последовательного возбуждения с симметричной обмоткой гладкого ротора. При полной симметрии, когда щетки расположены одна против другой, число пластин четное и при одинаковых начальных условиях токи в обеих частях *1* и *2* роторной обмотки (включая коротко замкнутые витки) будут равны, поэтому в динамическом отношении коллекторная машина в этом случае эквивалентна колесу Барлоу с самовозбуждением (рис. 3.28). Уравнения движения в принятой идеализации здесь будут такими же, как у более сложной электрической машины (рис. 3.29), лишь коэффициенты будут иметь несколько иной физический смысл. В обозначениях рис. 3.29 и при учете нелинейности кривой намагничения железа уравнения движения (3.120) рассматриваемой модели записываются в виде

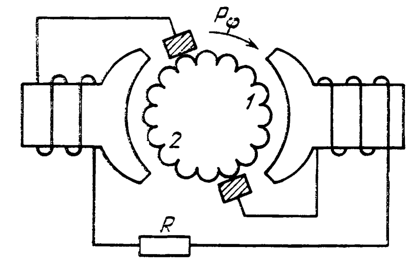


Рис. 3.29

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^0}{\partial \dot q} + \frac{\dot\varphi}{\dot q}\frac{\partial L^0}{\partial \alpha} + R\dot q = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^0}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L^0}{\partial \varphi} - \frac{\partial L^0}{\partial \alpha} = P_\varphi. \tag{3.121}$$

Здесь L^0 — функция Лагранжа системы, вычисленная так, как будто рассматриваемая система обладает одной «электрической» степенью свободы, т. е. параметры коротко замкнутого витка полностью исключаются; поэтому

$$L^0(\alpha, \dot q) = \int_0^{\dot q} \Phi(\alpha, \dot q)\, d\dot q + L_м, \tag{3.122}$$

где $\Phi(\alpha, \dot q)$ — поток магнитной индукции через основной контур, а угол α характеризует положение щетки в неподвижной системе координат.

При установившемся режиме выполняются соотношения

$$\frac{\dot\varphi_0}{\dot q_0}\int_0^{\dot q_0}\frac{\partial\Phi(\alpha,\dot q)}{\partial\alpha}\,d\dot q+R\dot q_0=0, \tag{3.123}$$

$$-\int_0^{\dot q_0}\frac{\partial\Phi(\alpha,\dot q)}{\partial\alpha}\,d\dot q=P_\varphi. \tag{3.124}$$

Если в качестве идеализации характеристики намагничения машины принять

$$\Phi(\alpha,\dot q)=n_2\Psi(n_2\dot q+n_1\cos\alpha\dot q)\sin\alpha+\Phi_0(\dot q), \tag{3.125}$$

где n_1 и n_2 — эффективные числа витков, Ψ — магнитный поток полюса, то уравнения (3.123), (3.124) установившегося режима имеют вид

$$\dot\varphi_0W(\alpha,\dot q_0)+R\dot q_0=0,\quad \dot q_0W(\alpha,\dot q_0)+P_\varphi=0. \tag{3.126}$$

Здесь

$$W(\alpha_0,\dot q_0)=n_2\Psi\left[\left(\frac{n_2}{2}\dot q_0+n_1\frac{\sin\alpha\dot q_0}{\alpha\dot q_0}\right)\cos\alpha+\right.$$
$$\left.+n_1\left(\cos\alpha\dot q_0-\frac{\sin\alpha\dot q_0}{\alpha\dot q_0}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]. \tag{3.127}$$

Уравнения (3.126) можно решить графически, после чего находятся условия самовозбуждения генератора. Аппроксимируя характеристику намагничения при малых токах прямой $\Phi=L(\alpha)\dot q$, из уравнений движения (3.121) нетрудно видеть, что генератор самовозбуждается при выполнении неравенства

$$\frac{\dot\varphi_0}{2}\frac{dL}{d\alpha}+R<0. \tag{3.128}$$

§ 3.11. Уравнения в вариациях

В ряде случаев представляет интерес изучать движение системы материальных точек не глобально, т. е. во всем фазовом пространстве, а в малой окрестности другого движения, которое считается известным. Для решения этой задачи разработаны различные методы, в том числе и метод линеаризации, который заключается в составлении и исследовании так называемых *уравнений в вариациях*.

Рассматриваемый в этом параграфе метод позволяет изучать малые отклонения материальной системы от ее известного движения, которое называется *невозмущенным движением*. Эти отклонения (*возмущения*) могут быть вызваны, например, изменением начальных условий. Метод, развитый А. Пуанкаре, основан на составлении дифференциальных уравнений для возмущений, которые считаются малыми.

Пусть рассматриваемая материальная система подчинена голономным стационарным связям, а $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты. Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.129}$$

Пусть для невозмущенного движения решение известно:

$$q_i = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{3.130}$$

тогда для возмущенного движения

$$q_i = f_i(t) + x_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.131}$$

где $x_i(t)$ — малые отклонения (возмущения) от невозмущенного движения. Так как кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{3.132}$$

то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставляя в это выражение решение (3.131) и ограничиваясь в разложении по степеням x_i и $\dot{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ членами, содержащими x_i и $\dot{x}_i$ в степени не выше первой, получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} (A_{ij})_0 \dot{f}_j + \sum_{j=1}^{n} (A_{ij})_0 \dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 x_k \dot{f}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Индекс 0 означает, что в A_{ij} и производных от A_{ij} вместо $f_i + x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ подставлено f_i. Далее имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} (A_{ij})_0 \ddot{f}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{d(A_{ij})_0}{dt}\dot{f}_j + \sum_{j=1}^{n} (A_{ij})_0 \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{d(A_{ij})_0}{dt}\dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 \dot{x}_k \dot{f}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 \dot{f}_j\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.133}$$

В соответствии с выражением (3.132)

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ki}}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

После замены $\dot{q}_j$ и $\dot{q}_k$ их выражениями (3.131) и разложения по степеням x_j и x_k $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{kj}}{\partial q_i}\right)_0 \dot{f}_j\dot{f}_k + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{kj}}{\partial q_i}\right)_0 \dot{f}_k\dot{x}_j +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 A_{k\nu}}{\partial q_j\,\partial q_i}\right)_0 x_j\dot{f}_k\dot{f}_\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.134)$$

(с точностью до членов с x_j и $\dot{x}_j$ в первой степени). Для обобщенных сил разложение по степеням x_i и $\dot{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с точностью до членов с x_i и $\dot{x}_i$ в первой степени имеет вид

$$Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) =$$
$$= Q_{i0} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_0 x_j + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\right)_0 \dot{x}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.135)$$

Так как $q_i = f_i(t)$ являются решениями уравнений (3.129), то справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{n}(A_{ij})_0\ddot{f}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{d(A_{ij})_0}{dt}\dot{f}_j -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{kj}}{\partial q_i}\right)_0 \dot{f}_j\dot{f}_k = Q_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.136)$$

Подставляя теперь выражения (3.133), (3.134) и (3.135) в уравнения (3.129) и учитывая тождество (3.136), получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\dot{x}_j = 0, \qquad (3.137)$$

где

$$a_{ij} = (A_{ij})_0, \quad b_{ij} = \frac{d(A_{ij})_0}{dt} - \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\right)_0, \qquad (3.138)$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j}\right)_0 \dot{f}_k\right] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 A_{k\nu}}{\partial q_j\,\partial q_i}\right)_0 \dot{f}_k\dot{f}_\nu - \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_0,$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\dot{f}_k\left[\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j}\right)_0 - \left(\frac{\partial A_{kj}}{\partial q_i}\right)_0\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Система из n линейных уравнений (3.137) называется уравнениями возмущенного движения или уравнениями в вариациях. Если невозмущенное движение таково, что коэффициенты уравнений (3.137) постоянны, то это движение называется стационарным. Для стационарного движения справедливо

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = -\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\right)_0,$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j}\right)_0 \ddot{f}_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 A_{k\nu}}{\partial q_j\, \partial q_i}\right)_0 \dot{f}_k \dot{f}_\nu - \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_0,$$

$$\frac{d}{dt}(d_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j}\right)_0 - \left(\frac{\partial A_{kj}}{\partial q_i}\right)_0\right] \ddot{f}_k = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Из последнего равенства следует

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j}\right)_0 \ddot{f}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A_{kj}}{\partial q_i}\right)_0 \ddot{f}_k$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Слагаемые $\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\dot{x}_j$ в уравнении (3.137) являются гироскопическими членами, так как коэффициенты d_{ij} обладают следующими свойствами:

$$d_{ii} = 0, \quad d_{ij} = -d_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Полученные нами уравнения возмущенного движения обычно используются для суждений об устойчивости невозмущенного движения.

Пример 3.24. В примере 3.19 было получено выражение для кинетической энергии свободного гироскопа в кардановом подвесе:

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{н}z_1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left(I_{\text{в}x}\omega_{\text{в}x}^2 + I_{\text{в}y}\omega_{\text{в}y}^2 + I_{\text{в}z}\omega_{\text{в}z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right).$$

Учитывая, что

$$\omega_{\text{в}x} = -\dot{\psi}\sin\theta, \quad \omega_{\text{в}y} = \dot{\theta}, \quad \omega_{\text{в}z} = \dot{\psi}\cos\theta,$$

$$\omega_x = \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta, \quad \omega_y = \dot{\theta}, \quad \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta,$$

а также что $I_{\text{в}x} = I_{\text{в}y}$ и $I_y = I_z$, получим

$$T = \frac{1}{2}\left(A_{11}\dot{\psi}^2 + A_{22}\dot{\theta}^2 + A_{33}\dot{\varphi}^2 + 2A_{13}\dot{\psi}\dot{\varphi}\right),$$

где

$$A_{11} = I_{\text{н}z_1} + I_{\text{в}z} + I_y + (I_{\text{в}x} - I_{\text{в}z} - I_y)\sin^2\theta + I_x\sin^2\theta,$$

$$A_{22} = I_{\text{в}x} + I_y = I_2, \quad A_{33} = I_x, \quad A_{13} = -I_x\sin\theta.$$

Уравнения движения в случае отсутствия внешних сил имеют вид

$$\left[I_{\text{н}z_1} + I_{\text{в}z} + I_y + (I_{\text{в}x} - I_{\text{в}z} - I_y)\sin^2\theta\right]\ddot{\psi} -$$

$$- I_x(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta)\dot{\theta}\cos\theta - 2(I_{\text{в}z} + I_y - I_{\text{в}x})\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$I_2\ddot{\theta} + I_x(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta)\dot{\psi}\cos\theta + (I_{\text{в}z} + I_y - I_{\text{в}x})\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[I_x(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta)\right] = 0.$$

За частное решение этих уравнений (невозмущенное движение) может быть взято $\psi = \psi_0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = \omega t$, где $\omega = \text{const}$. Таким образом, $f_1 = \psi_0$, $f_2 = \theta_0$, $f_3 = \omega t$. Согласно формулам (3.138) имеем

$$a_{11} = I_{\text{н}z_1} + I_{\text{в}z} + I_y + (I_{\text{в}x} - I_{\text{в}z} - I_y)\sin^2\theta_0 + I_x\sin^2\theta_0 = I_1,$$

$$a_{22} = I_2, \quad a_{33} = I_x, \quad a_{13} = -I_x\sin\theta_0,$$

$$a_{12} = -\omega I_x\cos\theta_0, \quad a_{21} = \omega I_x\cos\theta_0.$$

Остальные коэффициенты равны нулю. Так как $q_1 = \psi_0 + x_1$, $q_2 = \theta_0 + x_2$, $q_3 = \omega t + x_3$, то уравнения возмущенного движения (3.137) представятся в виде

$$I_1\ddot{x}_1 - I_x\omega\dot{x}_2\cos\theta_0 = 0, \quad I_2\ddot{x}_2 + I_x\omega\dot{x}_1\cos\theta_0 = 0,$$

$$\dot{x}_3 - \dot{x}_1\sin\theta_0 = c,$$

где c — постоянная. Решение этих уравнений имеет вид

$$x_1 = c_1 + c_2\cos kt + c_3\sin kt,$$

$$x_2 = c_4 + \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}(c_2\sin kt - c_3\cos kt),$$

$$x_3 = ct + (c_2\cos kt + c_3\sin kt)\sin\theta_0 + c',$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, c' — постоянные интегрирования, а

$$k = \frac{I_x\omega}{\sqrt{I_1 I_2}}\cos\theta_0.$$

При начальных условиях $t = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = \dot{x}_{20}$, $\dot{x}_3 = 0$, т. е. при ударе по внутренней рамке, получим

$$x_1 = \frac{I_2\dot{x}_{20}}{I_x\omega\cos\theta_0}(\cos kt - 1),$$

$$x_2 = \frac{\dot{x}_{20}\sqrt{I_1 I_2}}{I_x\omega\cos\theta_0}\sin kt,$$

$$x_3 = \frac{I_2\dot{x}_{20}}{I_x\omega}\operatorname{tg}\theta_0\cos kt.$$

Из этих выражений видно, что возмущенное движение по каждой координате представляет собой гармоническое колебание (*нутационные колебания*) *). Если ω достаточно велико, то амплитуды этих колебаний малы.

---

*) Если рассматривать нелинейную задачу, учитывая члены с x_j и $\dot{x}_j$ в степени выше первой, то можно обнаружить систематические уходы гироскопа, т. е. появление в решении членов, пропорциональных времени. Эта неустойчивость гироскопа была впервые обнаружена Е. Я. Николаи.

Глава 4

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 4.1. Канонические переменные. Функция Гамильтона

Дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$ для голономной системы в случае потенциального силового поля имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.1}$$

где $L = T - \Pi$, и представляют собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Вводя n новых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ как функции $t, q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, т. е.

$$z_i = z_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и предполагая, что эти зависимости могут быть разрешены относительно $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, мы можем привести систему уравнений (4.1) к системе $2n$ уравнений первого порядка.

Особый интерес представляют предложенные Гамильтоном переменные, называемые *каноническими*:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.2}$$

так как они дают возможность получить систему уравнений движения в симметричной форме, которая обладает рядом свойств, позволяющих плодотворно применять эти уравнения к изучению движения материальной системы. В дальнейшем переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ будем называть *каноническими переменными* в отличие от переменных Лагранжа $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Система (4.2) может быть разрешена относительно $\dot{q}_i$. В самом деле, как было установлено в § 3.1, кинетическую энергию можно представить в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{4.3}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} B_i\dot{q}_i, \quad T_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2.$$

В соответствии с выражением (4.2) имеем

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_j + B_i.$$

Так как определитель этой системы *)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1i} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ii} \end{vmatrix} = |A_{ij}| = \left|\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\right| = \left|\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j\, \partial \dot{q}_i}\right| \neq 0,$$

то она разрешима относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$. Гамильтон ввел в рассмотрение функцию

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L, \tag{4.4}$$

которая называется *функцией Гамильтона*. Сумму $\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i$ на основании (4.2) и (4.3) можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T_2, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = T_1$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i = 2T_2 + T_1.$$

Таким образом,

$$H = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - \Pi) = T_2 - T_0 + \Pi. \tag{4.5}$$

Если рассматриваемая материальная система стационарна, то $T = T_2$ и

$$H = T_2 + \Pi = T + \Pi,$$

т. е. функция Гамильтона равна полной механической энергии системы.

Переменные p_i называются *обобщенными импульсами* **).

---

*) Неравенство нулю определителя, составленного из коэффициентов A_{ij}, вытекает из условия детерминированности движения механической системы. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в книгах [1, 16].

**) Для свободной материальной точки $T = {}^1/_2 m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, а $p_1 = m\dot{x}$, $p_2 = m\dot{y}$, $p_3 = m\dot{z}$ представляют собой проекции количества движения точки на оси координат.

Пример 4.1. Найти функцию Гамильтона для математического маятника длины l, точка подвеса которого совершает движение по вертикальной окружности радиуса r с постоянной скоростью v_0 (рис. 4.1).

За обобщенную координату примем $q = \varphi$. Так как

$$x_A = r\cos\frac{v_0}{r}t + l\cos\varphi,$$

$$y_A = r\sin\frac{v_0}{2}t + l\sin\varphi,$$

то

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2\right) = $$

$$= \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2 + 2v_0 l\dot{\varphi}\cos\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right)\right].$$

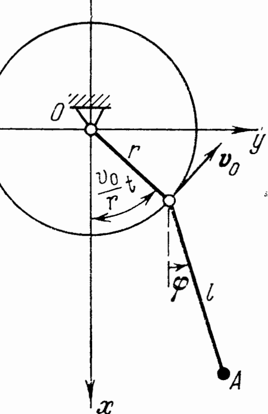


Рис. 4.1

Здесь несущественное постоянное слагаемое отброшено. При нахождении обобщенных сил все связи считаются мгновенно остановленными (§ 3.2); поэтому за потенциальную энергию мы можем принять *)

$$\Pi = -mgl\cos\varphi.$$

Функцией Лагранжа будет

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2 + 2v_0 l\dot{\varphi}\cos\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right)\right] + mgl\cos\varphi,$$

и следовательно,

$$p = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + mv_0 l\cos\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right),$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right). \qquad (4.6)$$

Составим функцию Гамильтона

$$H = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi. \qquad (4.7)$$

Если $v_0 = 0$, то

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2} - mgl\cos\varphi = T + \Pi = h.$$

Мы получили интеграл энергии, так как в рассматриваемом случае связи стационарны и L не зависит от t явно. Подставляя выражение (4.6) в функцию (4.7), получим

$$H = \frac{1}{2}ml^2\left[\frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right)\right]^2 - mgl\cos\varphi. \qquad (4.8)$$

*) Поскольку в уравнение Лагранжа входит $\partial\Pi/\partial q_i$, то П, взятое в виде $\Pi = -mg\left(l\cos\varphi + r\cos\frac{v_0}{r}t\right)$, ничего в выкладках не изменит.

§ 4.2. Канонические уравнения. Первые интегралы движения

Функция

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$$

является функцией t, $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, пока в ней не произведена замена всех $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ на $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Следовательно,

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} (\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i.$$

Так как в силу (4.2)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

то

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{4.9}$$

Выразив из соотношений (4.2) обобщенные скорости $\dot{q}_i$ через p_i и подставив их в функцию (4.4), получим, что H будет уже функцией только t, $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, т. е.

$$H = H(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n). \tag{4.10}$$

Тогда можно записать, что

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i. \tag{4.11}$$

Сравнивая выражения (4.9) и (4.11), имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях в правой и левой части этого равенства, получим

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Поскольку $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, то из уравнений (4.1) следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i.$$

Таким образом,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.12}$$

Полученная система $2n$ уравнений первого порядка называется *системой канонических уравнений* (или *уравнений Гамильтона*).

Если действующие на материальную систему силы не потенциальны, то уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.13}$$

Пусть среди обобщенных сил есть как потенциальные, так и непотенциальные силы. Тогда уравнения движения (4.13) можно записать в канонической форме, которая, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.14}$$

где символами Q_i обозначены непотенциальные силы.

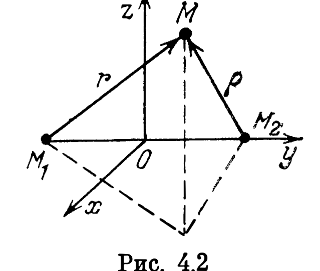


Рис. 4.2

Составим канонические уравнения Гамильтона для примера, рассмотренного в предыдущем параграфе.

Так как функция Гамильтона имеет вид (4.8), то

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = mlv_0\left[\frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right)\right]\sin\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right) - mgl\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right)$$

и следовательно,

$$\dot{p} = -mlv_0\left[\frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right)\right]\sin\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right) - mgl\sin\varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi - \frac{v_0}{r}t\right).$$

Пример 4.2. Точка M массы m притягивается к двум неподвижным центрам M_1 и M_2 силами, пропорциональными расстоянию точки от этих центров (рис. 4.2). Найти траекторию точки для начальных условий $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, $y = b > a$, $\dot{y} = 0$, $z = h$, $\dot{z} = 0$. Расстояние между центрами $M_1M_2 = 2a$.

Начало координат O мы предполагаем в середине отрезка M_1M_2, ось y направим по направлению отрезка M_1M_2 от O в сторону M_2. За обобщенные координаты примем декартовы координаты точки, т. е. $q_1 = x$, $q_2 = y$,

$q_3 = z$. Выражения для кинетической и потенциальной энергии соответственно имеют вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \qquad \Pi = \frac{c_1}{2} r^2 + \frac{c_2}{2} \rho^2,$$

где c_1 и c_2 — коэффициенты пропорциональности,

$$r^2 = x^2 + (y + a)^2 + z^2, \qquad \rho^2 = x^2 + (y - a)^2 + z^2.$$

Так как $p_1 = m\dot{x}$, $p_2 = m\dot{y}$, $p_3 = m\dot{z}$, то

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{c_1}{2} [x^2 + (y + a)^2 + z^2] + \frac{c_2}{2} [x^2 + (y - a)^2 + z^2].$$

Следовательно,

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -c_1 x - c_2 x, \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -c_1 (y + a) - c_2 (y - a),$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial z} = c_1 z - c_2 z, \qquad \dot{x} = \frac{p_1}{m}, \qquad \dot{y} = \frac{p_2}{m}, \qquad \dot{z} = \frac{p_3}{m}.$$

Отсюда получаем уравнения движения

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad \ddot{y} + k^2 y = N, \qquad \ddot{z} + k^2 z = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}, \qquad N = \frac{(c_2 - c_1) a}{m}.$$

Общими решениями этих уравнений будут

$$x = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt,$$

$$y = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt + \frac{N}{k^2},$$

$$z = A_3 \cos kt + B_3 \sin kt.$$

Используя начальные условия, получим

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{v_0}{k}, \quad A_2 = b - \frac{N}{k^2}, \quad B_2 = 0, \quad A_3 = h, \quad B_3 = 0$$

и, следовательно,

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt, \quad y = \left(b - \frac{N}{k^2}\right) \cos kt + \frac{N}{k^2}, \quad z = h \cos kt.$$

Если $h = 0$, то $z = 0$, т. е. движение происходит в плоскости xy. Траекторией движения будет кривая второго порядка — эллипс

$$\frac{x^2 k^2}{v_0^2} + \frac{(y - N/k^2)^2}{(b - N/k^2)^2} = 1.$$

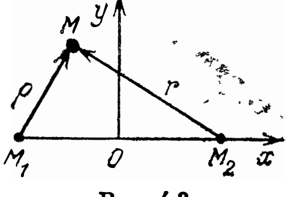


Рис. 4.3

Пример 4.3. Составить канонические уравнения для плоского движения материальной точки M массы m, притягиваемой к двум неподвижным центрам силами, обратно пропорциональными расстояниям от точки до притягивающих центров M_1 и M_2 [23].

Начало координат возьмем в середине отрезка $M_1 M_2$ и направим ось x по отрезку $M_1 M_2$ от M_1 к M_2 (рис. 4.3). Длина отрезка $M_1 M_2 = 2a$. Выраже-

ния для кинетической и потенциальной энергии соответственно имеют вид

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2),\qquad \Pi=-\frac{c_1m}{\rho}-\frac{c_2m}{r},$$

где c_1 и c_2 — коэффициенты пропорциональности,

$$\rho=\sqrt{(x+a)^2+y^2},\qquad r=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

За обобщенные координаты примем

$$\lambda=\frac{1}{2a}(r+\rho),\qquad \mu=\frac{1}{2a}(r-\rho).$$

Так как $r+\rho\geqslant 2a$ и $|r-\rho|\leqslant 2a$, то координаты λ и μ, которые называются *эллиптическими координатами*, могут принимать только те значения, которые удовлетворяют неравенствам

$$1\leqslant\lambda\leqslant\infty,\qquad -1<\mu<1.$$

Из выражений для ρ, λ, r и μ следует, что

$$x=-a\lambda\mu,\qquad y=a\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}.$$

Находя теперь

$$\dot{x}=-a(\dot{\lambda}\mu+\dot{\mu}\lambda),\qquad \dot{y}=a\left(\lambda\dot{\lambda}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}-\mu\dot{\mu}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\right),$$

получим выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T=\frac{1}{2}ma^2\left[(\dot{\lambda}\mu+\dot{\mu}\lambda)^2+\left(\lambda\dot{\lambda}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}-\mu\dot{\mu}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}ma^2(\lambda^2-\mu^2)\left(\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2-1}+\frac{\dot{\mu}^2}{1-\mu^2}\right),$$

$$\Pi=-\frac{c_1m}{a(\lambda-\mu)}-\frac{c_2m}{a(\lambda+\mu)}=-\frac{m}{a(\lambda^2-\mu^2)}[(c_1+c_2)\lambda+(c_1-c_2)\mu].$$

Вычислив

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}}=ma^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2-1},\qquad p_2=\frac{\partial T}{\partial\dot{\mu}}=-ma^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{\dot{\mu}}{\mu^2-1}$$

и подставив полученные значения в выражение для кинетической энергии, получим

$$T=\frac{1}{2m(\lambda^2-\mu^2)a^2}\left[p_1^2(\lambda^2-1)+p_2^2(1-\mu^2)\right].$$

Следовательно,

$$H=\frac{1}{2m(\lambda^2-\mu^2)a^2}\left[p_1^2(\lambda^2-1)+p_2^2(1-\mu^2)\right]-$$

$$-\frac{m}{a(\lambda^2-\mu^2)}[(c_1+c_2)\lambda+(c_1-c_2)\mu].$$

Каноническими уравнениями будут

$$\dot{p}_1 = -\frac{\lambda(1-\mu^2)(p_1^2+p_2^2)}{ma^2(\lambda^2-\mu^2)^2} - \frac{m}{a(\lambda^2-\mu^2)^2}\left[c_1(\lambda+\mu)^2 + c_2(\lambda-\mu)^2\right],$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\mu(\lambda^2-1)(p_2^2-p_1^2)}{ma^2(\lambda^2-\mu^2)^2} + \frac{m}{a(\lambda^2-\mu^2)^2}\left[c_1(\lambda+\mu)^2 - c_2(\lambda-\mu)^2\right],$$

$$\dot{\lambda} = \frac{p_1(\lambda^2-1)}{ma^2(\lambda^2-\mu^2)}, \quad \dot{\mu} = \frac{p_2(1-\mu^2)}{ma^2(\lambda^2-\mu^2)}.$$

Переходим теперь к рассмотрению условий, при выполнении которых имеют место интегралы движения. Как мы увидим, все первые интегралы канонических уравнений оказываются циклическими.

В общем случае функция Гамильтона H является функцией времени, n обобщенных координат и n обобщенных импульсов, т. е.

$$H = H(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Циклическими координатами мы ранее назвали обобщенные координаты, не входящие в явном виде в функцию Лагранжа. При выводе канонических уравнений было установлено, что

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. если частная производная от L по q_i равна нулю, то будет равна нулю и частная производная от H по q_i. Следовательно, циклические координаты не входят и в функцию Гамильтона.

Предположим, что первые k обобщенных координат являются циклическими, тогда согласно уравнениям (4.12)

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Отсюда

$$p_j = c_j \quad \text{и} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial c_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{4.15}$$

где c_j — постоянные интегрирования. Функция Гамильтона теперь будет зависеть от времени t, $n-k$ обобщенных координат, $n-k$ обобщенных импульсов и k постоянных интегрирования c_j:

$$H = H(t, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_n, c_1, c_2, \ldots, c_k). \tag{4.16}$$

Используя (4.12), получим

$$\dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial q_\lambda}, \quad \dot{q}_\lambda = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \quad (\lambda = k+1, k+2, \ldots, n), \tag{4.17}$$

т. е. систему $2n - 2k$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно p_λ и q_λ. Решения этих уравнений будут со-

держать $2\lambda = 2(n - k)$ произвольных постоянных интегрирования c_λ и c'_λ, а также постоянные интегрирования c_j, т. е.

$$p_\lambda = p_\lambda(t, c_\lambda, c'_\lambda, c_j), \quad q_\lambda = q_\lambda(t, c_\lambda, c'_\lambda, c_j) \quad (\lambda = k + 1, \ldots, n).$$

Подставляя эти решения в функцию H (4.16) и затем пользуясь выражениями (4.15)

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial c_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

найдем

$$q_j = \int \frac{\partial H}{\partial c_j} dt + c'_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где c'_j — новые постоянные интегрирования.

Следовательно, при наличии k циклических координат решение задачи сводится к решению системы уравнений (4.17), порядок которой уменьшен по сравнению с первоначальной на $2k$ единиц.

Дифференцируя функцию (4.10) по времени t, получим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j.$$

Учитывая, что

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

найдем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Если время t не входит явно в выражение функции Гамильтона H, т. е. является циклической переменной, то $\partial H/\partial t = 0$ и, следовательно, $dH/dt \equiv 0$. Таким образом, мы получаем еще один первый интеграл — интеграл Якоби

$$H = h = \text{const}.$$

Для стационарных связей $T = T_2$; следовательно,

$$H = T + \Pi = h, \tag{4.18}$$

т. е. *функция Гамильтона в случае стационарных связей и консервативных сил является постоянной величиной, равной полной механической энергии системы.*

Пример 4.4. Составить канонические уравнения для гироскопического маятника (рис. 4.4). Ротор имеет массу m_1, а его центр тяжести находится на расстоянии l_1 от неподвижной точки O. Груз B имеет массу m_2 и рас-

положен от неподвижной точки O на расстоянии l_2. Массой стержня и кольца пренебречь.

Ось y' подвижной системы координат $Ox'y'z'$ направим по стержню, а ось x' — горизонтально, перпендикулярно к стержню. Система координат

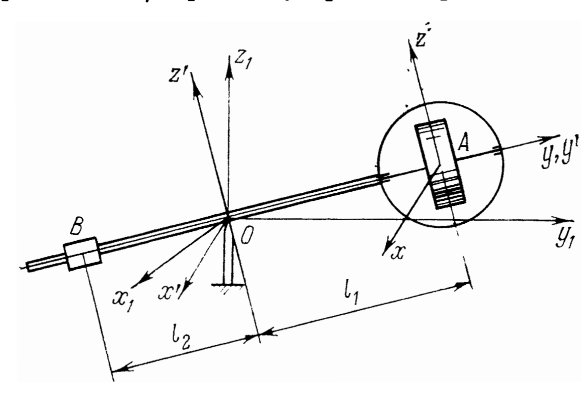


Рис. 4.4

$Axyz$ имеет оси, параллельные осям системы координат $Ox'y'z'$ (рис. 4.5). За обобщенные координаты примем

$$q_1 = \psi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi,$$

где φ — угол поворота ротора вокруг оси y, а θ и ψ определяют положение

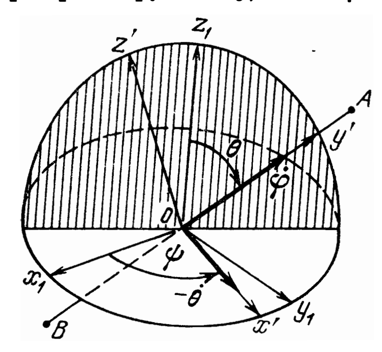


Рис. 4.5

стержня AB. Координаты центра тяжести ротора и груза соответственно определяются формулами

$$x_{1A} = -l_1 \sin\theta \sin\psi, \quad y_{1A} = l_1 \sin\theta \cos\psi, \quad z_{1A} = l_1 \cos\theta;$$
$$x_{1B} = l_2 \sin\theta \sin\psi, \quad y_{1B} = -l_2 \sin\theta \cos\psi, \quad z_{1B} = -l_2 \cos\theta.$$

Проекциями угловой скорости ротора на оси системы координат $Axyz$ будут

$$\omega_x = -\dot\theta, \quad \omega_y = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi, \quad \omega_z = \dot\psi \sin\theta.$$

Составим выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right) + \frac{1}{2} m_2 v_B^2.$$

Так как

$$v_A^2 = \dot{x}_{1A}^2 + \dot{y}_{1A}^2 + \dot{z}_{1A}^2 = l_1^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta\right),$$

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_{1B}^2 + \dot{z}_{1B}^2 = l_2^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta\right)$$

и $I_x = I_z$, то

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + I_x\right)\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta\right) + I_y\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)^2\right].$$

Выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = m_1 g z_{1A} + m_2 g z_{1B} = (m_1 l_1 - m_2 l_2)\, g \cos\theta.$$

Найдем теперь обобщенные импульсы

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi}\sin^2\theta + I_y\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)\cos\theta,$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = A\dot{\theta},$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_y\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right),$$

где $A = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + I_x$. Решая эти уравнения относительно $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$, получим

$$\dot{\psi} = \frac{p_1 - p_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_2}{A}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_3}{I_y} - \frac{p_1 - p_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta.$$

Функция Гамильтона будет выражаться формулой

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2A}\left[p_2^2 + \frac{(p_1 - p_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] + \frac{p_3^2}{2I_y} + (m_1 l_1 - m_2 l_2)\, g\cos\theta.$$

Обобщенные координаты ψ и φ являются циклическими. Поэтому

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0, \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0,$$

т. е. $p_1 = c_1$, $p_3 = c_3$. Отсюда

$$H = \frac{1}{2A}\left[p_2^2 + \frac{(c_1 - c_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] + \frac{c_3^2}{2I_y} + (m_1 l_1 - m_2 l_2)\, g\cos\theta.$$

Составляем теперь канонические уравнения

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{A} g\sin\theta - \frac{(c_1 - c_3\cos\theta)(c_3 - c_1\cos\theta)}{A\sin^3\theta},$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{A}, \quad \dot{\psi} = \frac{c_1 - c_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{c_3}{I_y} - \frac{c_1 - c_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta.$$

Отметим, что данная система имеет интеграл энергии

$$H = T + \Pi = h,$$

потому что время t также является циклической переменной.

§ 4.3. Теорема Якоби — Пуассона

Если для всех значений q_i и p_i, являющихся решением канонических уравнений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.19}$$

какая-либо функция $f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ сохраняет постоянное значение, то

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = c$$

называется *интегралом канонических уравнений.*

Например, если функция Гамильтона не зависит явно от времени t, то при движении системы она сохраняет постоянное значение; следовательно,

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = h$$

есть интеграл канонических уравнений. Если обобщенная координата q_k является циклической, то

$$p_k = \text{const}$$

— интеграл уравнений (4.19).

Предположим, что нам известны $2n$ интегралов уравнений (4.19), т. е.

$$f_k(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{4.20}$$

где c_k — постоянные величины *). Разрешая систему уравнений (4.20) относительно q_i и p_i, получим

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2n}), \\ p_i &= p_i(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2n}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{4.21}$$

т. е. решение уравнений (4.19). Если же число интегралов меньше $2n$, то с их помощью можно судить лишь о некоторых свойствах движения. Отсюда вытекает естественное желание получить возможно большее число независимых интегралов.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы Якоби — Пуассона, которая в некоторых случаях позволяет по двум имеющимся интегралам получить третий, рассмотрим некоторые свойства так называемых скобок Пуассона. Пусть φ и ψ являются

*) Предполагаем, что все интегралы являются независимыми, т. е. в число рассматриваемых интегралов не включаются произвольные функции от этих интегралов.

функциями t и q_i, p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Для операций над этими фукциями вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} & \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\\ \frac{\partial\psi}{\partial q_i} & \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\end{vmatrix}$$

Пуассон ввел обозначение (φ, ψ).

Итак,

$$(\varphi, \psi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right). \qquad (4.22)$$

Это преобразование называется *скобками Пуассона*. Из рассмотрения выражения (4.22) следует, что

1) $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$;

2) $(c\varphi, \psi) = c(\varphi, \psi) \quad (c = \text{const})$;

3) $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$;

4) если кроме функций φ и ψ рассмотреть еще какую-либо функцию $\chi(t, q_i, p_i)$, то в соответствии с (4.22) можно записать

$$(\varphi+\psi, \chi) = (\varphi, \chi) + (\psi, \chi);$$

5) путем непосредственных вычислений получаем *тождество Пуассона*:

$$((\varphi, \psi), \chi) + ((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi) \equiv 0. \qquad (4.23)$$

Тождество Пуассона можно доказать и проще. Каждый из членов этого тождества в силу (4.22) должен содержать вторые производные от функций, входящих во внутренние скобки Пуассона, причем каждая вторая производная какой-либо функции будет умножаться на первые производные от двух других функций. Значит, если доказать, что рассматриваемое выражение (4.23) не содержит вторых производных от функций φ, ψ и χ, то тождество будет доказано. Рассмотрим сумму

$$((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi) = ((\psi, \chi), \varphi) - ((\varphi, \chi), \psi) =$$
$$= (\psi, (\varphi, \chi)) - (\varphi, (\psi, \chi))$$

и докажем, что она не содержит членов с вторыми производными от функции χ. На основании (4.22) можно записать

$$(\psi, (\varphi, \chi)) - (\varphi, (\psi, \chi)) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}(\varphi, \chi) - \frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}(\varphi, \chi)\right] -$$
$$- \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}(\psi, \chi) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}(\psi, \chi)\right]$$

или

$$(\psi, (\varphi, \chi)) - (\varphi, (\psi, \chi)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right] \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \chi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right] \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i} \frac{\partial \chi}{\partial p_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial p_k \partial p_i} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial p_k \partial q_i} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_k \partial p_i} +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_k \partial q_i} \right] +$$

$+$ члены, не содержащие вторых производных от χ.

Если в полученном выражении заменить i на k, а k на i, то выражение под знаком двойной суммы изменит знак на обратный. Следовательно, двойная сумма равна нулю и исходное выражение

$$((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi)$$

не содержит членов со вторыми производными от χ. Аналогично можно показать, что выражения

$$((\varphi, \psi), \chi) + ((\chi, \varphi), \psi) \quad \text{и} \quad ((\varphi, \psi), \chi) + ((\psi, \chi), \varphi)$$

не содержат соответственно членов со вторыми производными от φ и ψ. Тем самым доказывается тождество Пуассона.

Предположим теперь, что функция

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

такова, что для $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, являющихся решениями канонических уравнений (4.19), справедливо равенство

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = c,$$

выполняющееся для заданного c при определенных начальных условиях*). Отсюда получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \equiv 0,$$

*) Иными словами, $f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = c$ является интегралом канонических уравнений (4.19).

или в соответствии с уравнениями (4.19)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\equiv 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f, H)\equiv 0. \qquad (4.24)$$

Верно и обратное утверждение, а именно: если для некоторой функции $f(t, q, p)$ имеет место тождество (4.24), то $f(t, q, p)=c$ является первым интегралом канонических уравнений (4.19).

Теперь сформулируем следующую теорему:

Теорема Якоби — Пуассона. *Пусть $f(t, q, p)=c_1$ и $\psi(t, q, p)=c_2$ являются первыми интегралами канонических уравнений* (4.19). *Тогда скобка Пуассона, составленная из этих функций и приравненная постоянной, т. е. $(f, \psi)=c_3$, тоже будет первым интегралом уравнений* (4.19).

Доказательство. Так как $f=c_1$ и $\psi=c_2$ — интегралы уравнений (4.19), то согласно (4.24) имеем следующие тождества:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f, H)\equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}+(\psi, H)\equiv 0. \qquad (4.25)$$

С другой стороны, на основании свойства скобок Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial t}(f, \psi)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \psi\right)+\left(f, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right).$$

Значит, выражение

$$\frac{\partial}{\partial t}(f, \psi)+((f, \psi), H)$$

с учетом (4.25) может быть переписано в виде

$$-((f, H), \psi)-(f, (\psi, H))+((f, \psi), H)$$

или

$$((f, \psi), H)+((\psi, H), f)+((H, f), \psi),$$

а последнее тождественно равно нулю в силу (4.23). Таким образом, доказано, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(f, \psi)+((f, \psi), H)\equiv 0,$$

т. е. $(f, \psi)=c_3$ является интегралом канонических уравнений (4.19).

При нахождении нового интеграла при помощи теоремы Якоби — Пуассона следует иметь в виду, что он может оказаться тождественно равным нулю или быть функцией от ранее известных интегралов (т. е. не будет независимым).

Пример 4.5. Для свободной изолированной материальной точки существуют интегралы количества движения

$$p_x = m\dot{x} = c_1, \quad p_y = m\dot{y} = c_2, \quad p_z = m\dot{z} = c_3$$

и момента количества движения

$$K_x = yp_z - zp_y = c_4, \quad K_y = zp_x - xp_z = c_5, \quad K_z = xp_y - yp_x = c_6.$$

Покажем, что

$$(K_x, K_y) = K_z = c_6.$$

В самом деле,

$$(K_x, K_y) = \frac{\partial K_x}{\partial x}\frac{\partial K_y}{\partial p_x} - \frac{\partial K_x}{\partial p_x}\frac{\partial K_y}{\partial x} + \frac{\partial K_x}{\partial y}\frac{\partial K_y}{\partial p_y} - \frac{\partial K_x}{\partial p_y}\frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_x}{\partial z}\frac{\partial K_y}{\partial p_z} - \frac{\partial K_x}{\partial p_z}\frac{\partial K_y}{\partial z} = (-p_y)(-x) - yp_x = xp_y - yp_x = c_6$$

§ 4.4. Метод канонических преобразований. Преобразование Лежандра

Цель канонических преобразований, т. е. перехода от одних канонических переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ к другим каноническим переменным $q_1', q_2', \ldots, q_n', p_1', p_2', \ldots, p_n'$ состоит в том, чтобы уравнения движения, записанные в новых канонических переменных, были бы проще и допускали если не полное, то хотя бы частичное интегрирование.

При составлении уравнений Лагранжа или канонических уравнений Гамильтона выбор обобщенных координат был произволен в том смысле, что за такие координаты можно было выбрать любые n независимых между собой величин, однозначно определяющих положение рассматриваемой динамической системы. Форма этих уравнений не зависит от той системы обобщенных координат, которая выбирается. Это значит, что если от каких-либо обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ перейти к новым обобщенным координатам $q_1', q_2', \ldots, q_n'$ по формулам

$$q_i' = q_i'(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.26}$$

то вид уравнений Лагранжа и Гамильтона останется прежним. Преобразование координат (4.26) называется *точечным*.

Если же в канонических уравнениях (4.12), содержащих $2n+1$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$, перейти к новым переменным $q_1', q_2', \ldots, q_n', p_1', p_2', \ldots, p_n'$, по формулам*)

$$\begin{gathered} q_i' = q_i'(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ p_i' = p_i'(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{4.27}$$

*) Предполагается, что уравнения (4.27) разрешимы относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

то в общем случае канонические уравнения своей формы (4.12) не сохранят. Однако существуют такие преобразования переменных, при которых канонические уравнения сохраняют свою форму. Такие преобразования называются *каноническими.*

Прежде чем рассмотреть канонические преобразования, познакомимся с преобразованием Лежандра, имеющим в теории канонических преобразований существенное значение. Пусть дана какая-либо функция ψ от $n = 2s + 1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

которую будем называть *производящей* по отношению к переменным $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$. Введем новые переменные, определяемые из соотношений

$$y_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4.28}$$

Тогда дифференциал от функции ψ будет иметь вид

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n-1} y_i\, dx_i + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} dx_n. \tag{4.29}$$

Разрешая уравнения (4.28) относительно старых переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, получим *)

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Эти формулы обратного преобразования от новых переменных к старым можно записать в форме (4.28). Для этого выберем функцию Ψ от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n$

$$\Psi = \Psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n)$$

так, чтобы

$$x_i = \frac{\partial\Psi}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4.30}$$

Полный дифференциал от функции Ψ равен

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\, dy_i + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} dx_n. \tag{4.31}$$

Функцию Ψ называют *производящей* по отношению к переменным $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$. Переход от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ к переменным $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ и от функции ψ к функции Ψ называется *преобразованием Лежандра.*

Это преобразование можно осуществить с помощью соотношения

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - \psi.$$

*) Мы предполагаем, что функция ψ обладает для этого всеми необходимыми свойствами.

В самом деле, так как

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\, dy_i + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\, dx_i - d\psi,$$

а $d\psi$ выражается формулой (4.29), то

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\, dy_i - \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\, dx_n.$$

Сравнивая это выражение с выражением (4.31) и приняв во внимание соотношения (4.30), получим

$$x_i = \frac{\partial\Psi}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_n} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_n}. \tag{4.32}$$

Таким образом, соотношения (4.28), (4.30) и (4.32) определяют прямое и обратное преобразования (преобразования Лежандра).

Пусть теперь требуется перейти от старых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ к новым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y_{n-1}, x_n$ и от функции $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к функции $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_{s+1}, \ldots, y_{n-1}, x_n)$. В этом случае преобразование можно осуществить с помощью формулы

$$\Psi = \sum_{i=s+1}^{n-1} x_i y_i - \psi. \tag{4.33}$$

Так как

$$d\Psi = \sum_{i=s+1}^{n-1} x_i\, dy_i + \sum_{i=s+1}^{n-1} y_i\, dx_i - d\psi,$$

а

$$d\psi = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{i=s+1}^{-1} y_i\, dx_i + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\, dx_n,$$

то

$$d\Psi = \sum_{i=s+1}^{n-1} x_i\, dy_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, dx_i - \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\, dx_n.$$

С другой стороны,

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{i=s+1}^{n-1} \frac{\partial\Psi}{\partial y_i}\, dy_i + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\, dx_n.$$

Сравнивая правые части этих выражений, получим формулы преобразования

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

$$x_i = \frac{\partial\Psi}{\partial y_i} \quad (i = s + 1, \ldots, n - 1), \qquad (4.34)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_n} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_n}.$$

В качестве примера преобразования Лежандра рассмотрим переход от переменных Лагранжа t, q_i, $\dot{q}_i$ к переменным Гамильтона t, q_i, p_i. Напомним, что $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$ [см. равенство (4.2)]. Из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

следует, что

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В качестве производящей функции от переменных Лагранжа возьмем функцию Лагранжа

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

В соответствии с формулой (4.33) производящая функция имеет вид

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L,$$

т. е. функция Ψ совпадает с функцией Гамильтона (4.4)

$$H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L.$$

На основании формул (4.34) теперь имеем

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Однако $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ и, следовательно,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Мы получили канонические уравнения.

Перейдем к рассмотрению канонических преобразований. В общем случае канонических преобразований при переходе от

переменных q_i, p_i, t к переменным q_i', p_i', t канонические уравнения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

переходят в уравнения вида

$$\dot{p}_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'}, \quad \dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где функция H' уже не является прежней функцией Гамильтона H, преобразованной к новым переменным $q_1', q_2', \ldots, q_n', p_1', p_2', \ldots, p_n'$. Если функция Гамильтона при каноническом преобразовании не меняется, т. е. $H' = H$, то такое преобразование называется *вполне каноническим.*

Рассмотрим это преобразование несколько подробнее. Пусть $H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — старая функция Гамильтона, а $H'(q_1', q_2', \ldots, q_n', p_1', p_2', \ldots, p_n')$ — новая функция Гамильтона. Рассмотрим выражение

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt = \sum_{i=1}^{n} p_i'\, dq_i' - H'\, dt + d\psi, \tag{4.35}$$

где ψ — произвольная функция от старых и новых обобщенных координат $(q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n')$. Это выражение можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} p_i'\dot{q}_i' - H' + \frac{d\psi}{dt}, \tag{4.36}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} p_i'\dot{q}_i' - H' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial q_i'}\dot{q}_i'.$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n}\left(p_i' + \frac{\partial\psi}{\partial q_i'}\right)\dot{q}_i' - (H - H') = 0.$$

Это выражение будет тождественно выполняться, если

$$p_i - \frac{\partial\psi}{\partial q_i} = 0, \quad p_i' + \frac{\partial\psi}{\partial q_i'} = 0, \quad H - H' = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда и получаем формулы нужных преобразований

$$p_i = \frac{\partial\psi}{\partial q_i}, \quad p_i' = -\frac{\partial\psi}{\partial q_i'}, \quad H' = H \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Докажем, что рассмотренное преобразование является вполне каноническим. Так как $H' = H$, то на основании выражения (4.36) можно записать

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i\right) = \delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i'\dot{q}_i' + \frac{d\psi}{dt}\right)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \delta p_i\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} p_i\delta\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \delta p_i'\dot{q}_i' + \sum_{i=1}^{n} p_i'\delta\dot{q}_i' + \delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\delta\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i\delta\left(\frac{dq_i}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i\delta q_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i'\delta\dot{q}_i' = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} p_i'\delta q_i' - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i'\delta q_i',$$

$$\delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta\psi),$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\delta p_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i'\delta p_i' - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i'\delta q_i' + \frac{d}{dt}\left[-\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i + \sum_{i=1}^{n} p_i'\delta q_i' + \delta\psi\right].$$

Соотношение (4.35) при $H' = H$ может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} p_i'\delta q_i' + \delta\psi,$$

и следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\delta p_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i'\delta p_i' - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i'\delta q_i'. \qquad (4.37)$$

Для переменных q_i и p_i канонические уравнения имеют вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Значит, левую часть полученного выражения (4.37) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i = \delta H.$$

Таким образом,

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i' \delta p_i' - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i' \delta q_i'. \tag{4.38}$$

В силу того, что $H' = H$,

$$\delta H = \delta H'.$$

Следовательно, выражение (4.38) утверждает, что

$$\delta H' = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i' \delta p_i' - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i' \delta q_i'.$$

С другой стороны,

$$\delta H' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H'}{\partial q_i'} \delta q_i' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H'}{\partial p_i'} \delta p_i'.$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i' - \frac{\partial H'}{\partial p_i'} \right) \delta p_i' + \sum_{i=1}^{n} \left(- \dot{p}_i' - \frac{\partial H'}{\partial q_i'} \right) \delta q_i' = 0. \tag{4.38'}$$

Если взять частную производную по p_i' от функции Гамильтона

$$H' = \sum_{i=1}^{n} p_i' \dot{q}_i' - L' (q', \dot{q}', t),$$

то получим

$$\frac{\partial H'}{\partial p_i'} = \dot{q}_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому все круглые скобки в первой сумме (4.38′) равны нулю (из определения функции Гамильтона). Вследствие независимости всех вариаций $\delta q_i'$ равны нулю и все круглые скобки во второй сумме, т. е.

$$\dot{p}_i' = - \frac{\partial H'}{\partial q_i'}, \quad \dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, рассмотренное преобразование является вполне каноническим.

Таким образом, если задаться какой-либо производящей функцией $\psi (q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n')$, то в соответствии с соотношениями (4.34) из уравнений

$$p_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

определим все

$$q_i' = q_i' (q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n). \tag{4.39}$$

Из уравнений

$$p_i' = - \frac{\partial \psi}{\partial q_i'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)]$$

после подстановки в них всех $q_1', q_2', \ldots, q_n'$, определенных по (4.39), найдем все

$$p_i' = p_i'(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Новая же функция Гамильтона равна

$$H'(q_1', q_2', \ldots, q_n', p_1', p_2', \ldots, p_n') = H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

В более общем случае, когда функция Гамильтона будет зависеть от времени, т. е. когда $H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t)$, можно доказать*), что обратимое преобразование (4.27) будет каноническим, если дифференциальная форма

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} p_i'\dot{q}_i' - H' + \frac{dV}{dt}, \tag{4.40}$$

где V — произвольная функция от t, старых и новых переменных q, p и q', p', удовлетворяется тождественно.

Рассмотрим некоторые типы канонических преобразований.

1. Пусть $V = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_1', q_2', \ldots, q_n', t)$. Тогда соотношение (4.40) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} p_i'\dot{q}_i' - H' + \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial q_i'}\dot{q}_i',$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n}\left(p_i' + \frac{\partial\psi}{\partial q_i'}\right)\dot{q}_i' + \left(H' - H - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0.$$

Это условие будет тождественно удовлетворено, если

$$p_i = \frac{\partial\psi}{\partial q_i}, \quad p_i' = -\frac{\partial\psi}{\partial q_i'}, \quad H' = H + \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.41}$$

Теперь из формул (4.41) можно получить искомое преобразование (4.27) и новую функцию Гамильтона H'.

2. Пусть производящая функция ψ будет функцией $t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1', p_2', \ldots, p_n'$, т. е. $\psi = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1', p_2', \ldots, p_n', t)$. Тогда, выбирая

$$V = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1', p_2', \ldots, p_n', t) - \sum_{i=1}^{n} p_i'q_i',$$

перепишем выражение (4.40) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} p_i'\dot{q}_i' - H' + \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial p_i'}\dot{p}_i' - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i'q_i' - \sum_{i=1}^{n} p_i'\dot{q}_i'$$

*) Доказательство дано в гл. 5.

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i-\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(q_i'-\frac{\partial\psi}{\partial p_i'}\right)\dot{p}_i'+\left(H'-H-\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0.$$

Полученное условие будет удовлетворено, если

$$p_i=\frac{\partial\psi}{\partial q_i},\quad q_i'=\frac{\partial\psi}{\partial p_i'},\quad H'=H+\frac{\partial\psi}{\partial t}\qquad (i=1,2,\ldots,n),\ (4.42)$$

откуда и находится искомое преобразование.

3. Пусть производящая функция ψ будет функцией $q_1', q_2', \ldots$ $\ldots, q_n', p_1, p_2, \ldots, p_n$ и t, т. е. $\psi=\psi(q_1', q_2', \ldots, q_n', p_1, p_2, \ldots, p_n, t)$. Примем, что

$$V=\psi(q_1', q_2', \ldots, q_n', p_1, p_2, \ldots, p_n, t)+\sum_{i=1}^{n}q_ip_i,$$

и подставим это выражение в соотношение (4.40):

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-H=\sum_{i=1}^{n}p_i'\dot{q}_i'-H'+\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial q_i'}\dot{q}_i'+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\dot{p}_i+\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_ip_i+\sum_{i=1}^{n}q_i\dot{p}_i.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i'+\frac{\partial\psi}{\partial q_i'}\right)\dot{q}_i'+\sum_{i=1}^{n}\left(q_i+\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\dot{p}_i+\left(H-H'+\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0.$$

Это соотношение удовлетворяется, если

$$p_i'=-\frac{\partial\psi}{\partial q_i'},\quad q_i=-\frac{\partial\psi}{\partial p_i},\quad H'=H+\frac{\partial\psi}{\partial t}\qquad (i=1,2,\ldots,n).\ (4.43)$$

Из уравнений (4.43) определяется искомое преобразование.

4. Пусть производящая функция ψ есть функция времени, старых и новых импульсов, т. е. $\psi=\psi(p_1, p_2, \ldots, p_n, p_1', p_2', p_3', \ldots, p_n', t)$. Выберем

$$V=\psi(p_1, p_2, \ldots, p_n, p_1', p_2', \ldots, p_n', t)-\sum_{i=1}^{n}p_i'q_i'+\sum_{i=1}^{n}p_iq_i.$$

Соотношение (4.40) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-H=\sum_{i=1}^{n}p_i'\dot{q}_i'-H'+\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\dot{p}_i+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial p_i'}\dot{p}_i'-\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i'q_i'-\sum_{i=1}^{n}p_i'\dot{q}_i'+\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_iq_i+\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left(q_i+\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\dot{p}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(-q_i'+\frac{\partial\psi}{\partial p_i'}\right)\dot{p}_i'+\left(H-H'+\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0.$$

Это соотношение будет удовлетворено, если

$$q_i=-\frac{\partial\psi}{\partial p_i},\quad q_i'=\frac{\partial\psi}{\partial p_i'},\quad H'=H+\frac{\partial\psi}{\partial t}\quad (i=1,2,\ldots,n).\quad (4.44)$$

Очевидно, что, задавшись какой-либо функцией $\psi(p_i, p_i', t)$, из уравнений

$$q_i=-\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

можно найти p_i' как функции t, q_i, p_i. Далее, в уравнения

$$q_i'=\frac{\partial\psi}{\partial p_i'}\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

подставляют найденные p_i' как функции t, q_i, p_i и таким образом находят искомое преобразование (4.27).

Пример 4.6. Пусть производящая функция имеет вид

$$\psi=\psi(q_i, p_i', t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)\,p_i'+h(q_1, q_2, \ldots, q_n, t).$$

На основании зависимостей (4.42)

$$p_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial q_i}p_i'+\frac{\partial h}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

$$q_i'=f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

т. е. при таком каноническом преобразовании преобразуются только обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $q_1', q_2', \ldots, q_n'$. Такие преобразования являются точечными.

Пример 4.7. Для цилиндрических координат r, φ и z введем обозначения $q_1=r$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$. Рассмотрим свободную материальную точку, находящуюся в поле силы тяжести. Для такой точки

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2+q_1^2\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2\right),\qquad \Pi=mgq_3$$

и

$$p_1=m\dot{q}_1,\quad p_2=mq_1^2\dot{q}_2,\quad p_3=m\dot{q}_3.$$

Поэтому

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{q_1^2}+p_3^2\right)+mgq_3.$$

Рассмотрим каноническое преобразование, получающееся при производящей функции вида

$$\psi=p_1'q_1\cos q_2+p_2'q_1\sin q_2+p_3'q_3.$$

На основании (4.42) имеем

$$p_1 = \frac{\partial\psi}{\partial q_1} = p_1' \cos q_2 + p_2' \sin q_2,$$

$$p_2 = \frac{\partial\psi}{\partial q_2} = - p_1' q_1 \sin q_2 + p_2' q_1 \cos q_2,$$

$$p_3 = \frac{\partial\psi}{\partial q_3} = p_3'$$

и

$$q_1' = \frac{\partial\psi}{\partial p_1'} = q_1 \cos q_2,$$

$$q_2' = \frac{\partial\psi}{\partial p_2'} = q_1 \sin q_2,$$

$$q_3' = \frac{\partial\psi}{\partial p_3'} = q_3.$$

Из первых трех уравнений находим

$$p_1' = m(\dot q_1 \cos q_2 - q_1 \dot q_2 \sin q_2) = m\dot q_1',$$

$$p_2' = m(\dot q_1 \sin q_2 + q_1 \dot q_2 \cos q_2) = m\dot q_2',$$

$$p_3' = m\dot q_3 = m\dot q_3'.$$

Новая функция H' будет иметь вид

$$H' = \frac{1}{2m}\left(p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2\right) + mgq_3'.$$

Очевидно, что новые координаты q_1', q_2', q_3' являются декартовыми координатами точки.

Пример 4.8. Рассмотрим прямолинейное движение точки под действием восстанавливающей силы $F = -cx$, где $|x|$ — расстояние точки от притягивающего центра, $c > 0$.

Приняв за обобщенную координату x, т. е. положив $q = x$, найдем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} m\dot q^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} cq^2.$$

Так как $L = T - \Pi = \frac{1}{2}(m\dot q^2 - cq^2)$, то

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = m\dot q.$$

Напишем выражение для функции Гамильтона:

$$H = p\dot q - L = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}k^2 mq^2,$$

где $k^2 = c/m$. Составим канонические уравнения

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -k^2 mq, \quad \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

Так как рассматриваемая система консервативна, то функция Гамильтона равна полной энергии системы, т. е. $H = h$. Найдем такое каноническое преобразование, при котором бы новая функция Гамильтона H' не содержала новой координаты q', а новый импульс входил бы в первой степени, т. е.

$$H' = kp'.$$

Воспользуемся вторым типом канонических преобразований, когда $\psi = \psi(q, p')$. В соответствии с формулами (4.42) $H = H'$, т. е.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m} + k^2mq^2\right) = kp'.$$

Отсюда

$$p = \frac{\partial\psi}{\partial q} = \sqrt{2mkp' - k^2m^2q^2} \tag{4.45}$$

и

$$\psi = \int_0^q \sqrt{2mkp' - k^2m^2q^2}\, dq.$$

Так как

$$q' = \frac{\partial\psi}{\partial p'} = \int_0^q \frac{mk\, dq}{\sqrt{2mkp' - k^2m^2q^2}},$$

то

$$q' = \arcsin \sqrt{\frac{km}{2p'}}\, q$$

и

$$q = \sqrt{\frac{2p'}{km}} \sin q'.$$

Из формулы (4.45) получаем

$$p = \sqrt{2mkp' - k^2m^2q^2} = \sqrt{2mkp'} \cos q'.$$

Новая координата q' является циклической, так как она не входит в функцию Гамильтона. Следовательно, новый импульс является постоянной величиной

$$p' = \frac{h}{k}.$$

Координату q' определим из канонического уравнения

$$\dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = k.$$

Отсюда $q' = kt + \varepsilon$

$$p = \sqrt{2mh} \cos (kt + \varepsilon), \qquad q = \sqrt{\frac{2h}{mk^2}} \sin (kt + \varepsilon).$$

Пример 4.9. Пусть производящая функция $\psi = \sum_{i=1}^{n} p_i' q_i$. Тогда каноническое преобразование определяется формулами (4.42), используя которые, находим

$$p_i = \frac{\partial\psi}{\partial q_i} = p_i', \qquad q_i' = \frac{\partial\psi}{\partial p_i'} = q_i.$$

Отсюда следует, что полученное тождественное преобразование также является каноническим.

Пример 4.10. Производящая функция $\psi = \sum_{i=1}^{n} q_i q_i'$ согласно формулам (4.41) приводит к преобразовапию

$$p_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i} = q_i', \quad p_i' = -\frac{\partial \psi}{\partial q_i'} = -q_i,$$

при котором обобщенные импульсы p_i превращаются в обобщенные координаты q_i', а обобщенные координаты q_i — в обобщенные импульсы — p_i'. Этот пример указывается на равноправность канонических переменных q_i, p_i.

§ 4.5. Метод Остроградского — Якоби. Теорема Лиувилля

Пусть движение голономной системы описывается каноническими уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.46}$$

В § 4.2 было выяснено, что наличие k циклических обобщенных координат у рассматриваемой системы позволяет получить для этих координат решение. В связи с этим естественно поставить вопрос о возможности нахождения такого канонического преобразования, при котором в преобразованных уравнениях Гамильтона функция H не будет содержать обобщенных координат, т. е. все новые обобщенные координаты будут циклическими. Предположим, что пользуясь вторым типом канонических преобразований (см. с. 151), где

$$\begin{gathered} \psi = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1', p_2', p_3', \ldots, p_n', t), \\ p_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \quad q_i' = \frac{\partial \psi}{\partial p_i'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{4.47}$$

мы найдем новую функцию Гамильтона вида

$$H' = f(p_1', p_2', \ldots, p_n'), \tag{4.48}$$

где f — любая функция. Тогда для новых переменных будет

$$\dot{p}_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.49}$$

$$\dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.50}$$

и

$$H' = H + \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{4.51}$$

Из уравнений (4.49) следует, что

$$p_i' = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.52}$$

где α_i — постоянные интегрирования. Подставляя теперь выражения (4.52) в уравнения (4.50), получим

$$q_i' = \omega_i t + \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.53}$$

где $\omega_i = \left(\frac{\partial f}{\partial p_i'}\right)_{p_i'=\alpha_i}$ — постоянные величины, а β_i — постоянные интегрирования. Выражения (4.52) и (4.53) представляют собой систему интегралов уравнений (4.49) и (4.50). Используя теперь преобразование (4.47), мы могли бы получить старые переменные q_i и p_i, т. е. решить задачу о движении системы*). Однако мы не можем этого сделать, так как нам неизвестна функция ψ. Рассмотрим соотношение (4.51) с учетом выражения (4.48):

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = f(p_1', p_2', \ldots, p_n').$$

Заменяя в этом соотношении в соответствии с формулами (4.47) и (4.52) переменные p_i на $\frac{\partial \psi}{\partial q_i}$ и p_i' на α_i, будем иметь

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \tag{4.54}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, которому должна удовлетворять производящая функция $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t)$ с основными переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$. Так как в выражении (4.48) функция f произвольная, то мы можем принять

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Тогда уравнение (4.54) примет вид

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \tag{4.55}$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных называется *уравнением Гамильтона — Якоби.* Решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащее столько произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных, называется *полным интегралом* этого уравнения. Функция ψ в уравнение (4.55) входит только через свои производные. Это значит, что одна произвольная постоянная будет входить в полный интеграл в виде слагаемого, т. е. полный

*) Мы предполагаем, что функции f и ψ обладают свойствами, необходимыми для такого преобразования.

интеграл уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид

$$S = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t) + \alpha_0, \qquad (4.56)$$

где α_0 — произвольная постоянная. В самом деле, если $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t)$ является решением уравнения (4.55), то в силу того, что

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

функция S является решением уравнения (4.55), содержащим $n+1$ произвольных постоянных, т. е. является его полным интегралом.

Итак, если известен полный интеграл (4.56) уравнения Гамильтона — Якоби, то для получения решения исходной системы уравнений (4.46) следует за производящую взять функцию

$$\psi = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t),$$

затем в формулах канонического преобразования (4.47) заменить p_i' на α_i и q_i' в соответствии с выражением (4.53) на β_i. Тогда будем иметь

$$p_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (4.57)$$

$$\beta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (4.58)$$

так как при $f = 0$

$$\omega_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Уравнения (4.58) дают возможность выразить обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ через время t и $2n$ произвольных постоянных α_i и β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Таким образом, мы показали, что если известен полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, то нет необходимости интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.46), т. е. задача интегрирования системы (4.46) заменяется задачей нахождения полного интеграла уравнения (4.55).

В результате мы приходим к *теореме Остроградского — Якоби*, которая гласит: *пусть функция* (4.56) *является полным интегралом уравнения в частных производных* (4.55), *тогда все первые интегралы канонических уравнений* (4.46) *даются соотношениями* (4.57) *и* (4.58).

Пример 4.11. Составим уравнение Гамильтона — Якоби для точки, движущейся в однородном поле силы тяжести.

За обобщенные координаты примем $q_1 = x$, $q_2 = y$ — декартовы координаты точки.

Запишем выражения для кинематической и потенциальной энергий:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot q_1^2+\dot q_2^2\right),\qquad \Pi=mgq_2.$$

Так как $p_1=m\dot q_1$ и $p_2=m\dot q_2$, $H=T+\Pi$, то функция Гамильтона

$$H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+mgq_2$$

и, следовательно, уравнение Гамильтона — Якоби будет иметь вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)^2+mgq_2+\frac{\partial\psi}{\partial t}=0. \tag{4.59}$$

Предположим, что рассматриваемая механическая система подчинена стационарным связям. В этом случае функция Гамильтона от времени явно не зависит и уравнение (4.55) имеет вид

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial t}=0. \tag{4.60}$$

Вместо этого уравнения можно рассматривать более простое, приняв

$$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)=$$
$$=-ht+W(q_1, q_2, \ldots, q_n, h, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

где $h=\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные. Так как при этом

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-h,\quad \frac{\partial\psi}{\partial q_i}=\frac{\partial W}{\partial q_i}\qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

то вместо уравнения (4.60) будем иметь

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=h, \tag{4.61}$$

где h — полная механическая энергия (см. равенство (4.6)). Проинтегрировав его, найдем

$$W=W(q_1, q_2, \ldots, q_n, h, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Следовательно,

$$\psi=-ht+W(q_1, \ldots, q_n, h, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Отсюда

$$\frac{\partial\psi}{\partial h}=-t+\frac{\partial W}{\partial h},\quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\qquad (i=2, 3, \ldots, n).$$

На основании (4.58)

$$\beta_1=-t+\frac{\partial W}{\partial h},\quad \beta_i=\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\qquad (i=2, 3, \ldots, n).$$

Положив $\beta_1 = -t_0$, окончательно получим

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0, \tag{4.62}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n), \tag{4.63}$$

а также

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Из формул (4.62) и (4.63) теперь можно найти обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Заметим, что время t входит только в уравнение (4.62), уравнения же (4.63) времени не содержат и представляют собой уравнения траектории в пространстве конфигураций.

Итак, показано, что интегрирование канонических уравнений Гамильтона можно заменить нахождением полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. В общем случае обе эти задачи обладают одинаковой трудностью, однако имеются динамические задачи, для которых нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби оказывается более простым, чем интегрирование уравнений Гамильтона.

Рассмотрим метод разделения переменных, позволяющий в ряде важных случаев получить полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

Предположим, что часть обобщенных координат, например, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k < n)$, и соответствующие им обобщенные импульсы $p_1, p_2, \ldots, p_k$ входят в функцию Гамильтона в виде функций $\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \ldots, \varphi_k(q_k, p_k)$, причем каждая из этих функций не зависит от времени t и обобщенных координат и обобщенных импульсов, не имеющих индекса функции. Функция Гамильтона будет при этом иметь вид

$$H = H[\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \ldots \\ \ldots, \varphi_k(q_k, p_k), q_{k+1}, \ldots, q_n, p_{k+1}, \ldots, p_n, t].$$

Напишем соответствующее этой функции уравнение Гамильтона — Якоби

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right), \ldots, \varphi_k\left(q_k, \frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right), q_{k+1}, \ldots, q_n, \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial q_n}, t\right] + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \tag{4.64}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\psi = \psi_1(q_1) + \psi_2(q_2) + \ldots + \psi_k(q_k) + \psi^*(q_{k+1}, \ldots, q_n, t). \tag{4.65}$$

После подстановки этого выражения в уравнение (4.64) получим

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{d\psi_1}{dq_1}\right), \ldots, \varphi_k\left(q_k, \frac{d\psi_k}{dq_k}\right), q_{k+1}, \ldots, q_n, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_n}, t\right] + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 0. \quad (4.66)$$

Предположим теперь, что выражение (4.65) является решением уравнения (4.64), тогда уравнение (4.66) представляет собой тождество. Это тождество должно сохраняться при любых значениях $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Так как эти координаты между собой независимы, то это может быть только в том случае, если функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ при изменении координат $q_1, q_2, \ldots, q_k$ останутся постоянными. Это значит, что уравнение (4.66) распадается на $k+1$ уравнений

$$\varphi_1\left(q_1, \frac{d\psi_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \; \varphi_2\left(q_2, \frac{d\psi_2}{dq_2}\right) = \alpha_2, \; \ldots, \; \varphi_k\left(q_k, \frac{d\psi_k}{dq_k}\right) = \alpha_k, \quad (4.67)$$

$$H\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, q_{k+1}, \ldots, q_n, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 0, \quad (4.68)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — произвольные постоянные. Первые k уравнений (4.67) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Уравнение (4.68) остается уравнением в частных производных, но переменных в этом уравнении меньше, чем в исходном.

Рассмотрим случай наличия циклических координат. Если обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k < n)$ будут циклическими, то соответствующие им обобщенные импульсы $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_k$ будут постоянными величинами, т. е.

$$p_j = \frac{\partial\psi}{\partial q_j} = \alpha_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Следовательно, уравнение Гамильтона — Якоби в этом случае имеет вид

$$H\left(q_{k+1}, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial\psi}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0.$$

Так как $\frac{\partial\psi}{q_j} = \alpha_j$, функцию ψ запишем в виде

$$\psi = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j q_j + \psi^*(q_{k+1}, \ldots, q_n, t).$$

Тогда

$$H\left(q_{k+1}, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 0.$$

В этом уравнении Гамильтона — Якоби функция ψ^* является уже функцией $n-k$ неизвестных.

Для консервативной динамической системы в случае, если функция Гамильтона имеет структуру вида

$$H = H[\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \ldots, \varphi_n(q_n, p_n)],$$

где функции $\varphi_i(q_i, p_i)$ не зависят от времени, обобщенных координат и обобщенных импульсов, имеющих индекс, отличный от индекса функции, уравнение (4.64) принимает вид

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), \ldots, \varphi_n\left(q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)\right] = h.$$

Если искать решение этого уравнения в виде

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \ldots + W_n(q_n) = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i), \tag{4.69}$$

то получим

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}\right), \ldots, \varphi_n\left(q_n, \frac{dW_n}{dq_n}\right)\right] = h. \tag{4.70}$$

Если выражение (4.69) будет решением уравнения, то в силу независимости обобщенных координат каждая из функций $\varphi_i(q_i, p_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будет постоянна, т. е.

$$\varphi_i\left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i}\right) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.71}$$

где α_i — произвольные постоянные.

Следовательно, решение задачи сводится к интегрированию обыкновенных уравнений (4.71). Постоянная h в силу зависимостей (4.70) и (4.71) будет функцией $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, т. е.

$$h = H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Для функции ψ имеем

$$\psi = -ht + \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i, \alpha_i).$$

В соответствии с преобразованием (4.58) окончательное решение задачи получим из формул

$$\frac{dW_i}{d\alpha_i} = \beta_i + \frac{\partial h}{\partial \alpha_i} t \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.72}$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — произвольные постоянные.

Рассмотрим случай, когда консервативная система имеет циклические координаты. Пусть циклическими координатами будут $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k < n)$. Тогда укороченное уравнение Гамильтона — Якоби (4.61) примет вид

$$H\left[q_{k+1}, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial W}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right] = h.$$

Решение этого уравнения можно искать в виде

$$W = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j q_j + W^* \left(q_{k+1}, \ldots, q_n, \frac{\partial W^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial W^*}{\partial q_n} \right).$$

Тогда уравнение Гамильтона — Якоби

$$H \left(q_{k+1}, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial W^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial W^*}{\partial q_n} \right) = h$$

служит для определения функции W^* от $n-k$ переменных $q_{k+1}, \ldots, q_n$. Предположим, что мы нашли полный интеграл этого уравнения (с точностью до аддитивной постоянной)

$$W^* = W^* (q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n).$$

Тогда, приняв $h = \alpha_{k+1}$ на основании (4.62) и (4.63), получим

$$\frac{\partial W^*}{\partial \alpha_{k+1}} = t - t_0,$$
$$\frac{\partial W^*}{\partial \alpha_j} = -q_j + \beta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \qquad (4.73)$$
$$\frac{\partial W^*}{\partial \alpha_\nu} = \beta_\nu \quad (\nu = k+2, \ldots, n).$$

Из рассмотрения метода разделения переменных следует, что для его применения существен удачный выбор обобщенных координат, так как при одной системе обобщенных координат переменные могут быть разделены, а при другой пет.

Пример 4.12. Применим метод разделения переменных для уравнения (4.59). Координата q_1 является циклической, поэтому имеем

$$\psi = -ht + \alpha_1 q_1 + W_2(q_2),$$

и тогда

$$\frac{\alpha_1^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_2}{dq_2} \right)^2 + mgq_2 = h.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_2}{dq_2} \right)^2 + mgq_2 = \alpha_2 \text{ и } h = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{2m}. \qquad (4.74)$$

Так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial h}{\partial \alpha_1} t + q_1 = -\frac{\alpha_1}{m} t + q_1 = \beta_1,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = -\frac{\partial h}{\partial \alpha_2} t + \frac{dW_2}{d\alpha_2} = -t + \frac{dW_2}{d\alpha_2} = \beta_2,$$

то

$$q_1 = \frac{\alpha_1}{m} t + \beta_1, \quad \frac{dW_2}{d\alpha_2} = t + \beta_2.$$

Найдем теперь решение уравнения (4.74). Для этого перепишем его в следующем виде:

$$\frac{dW_2}{dq_2} = \sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)}.$$

Отсюда

$$W_2 = \int dq_2 \sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)} + c$$

и

$$\frac{dW_2}{d\alpha_2} = \int \frac{m\,dq_2}{\sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)}} = -\frac{1}{mg}\sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)}.$$

Таким образом,

$$q_1 = \frac{\alpha_1}{m} t + \beta_1, \quad -\frac{1}{mg}\sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)} = t + \beta_2,$$

или

$$q_1 = \frac{\alpha_1}{m} t + \beta_1, \quad q_2 = -\frac{g(t+\beta_2)^2}{2} + \frac{\alpha_2}{mg}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1} = \alpha_1 = p_1 = m\dot{q}_1,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_2} = \frac{dW_2}{dq_2} = -mg(t+\beta_2) = p_2 = m\dot{q}_2.$$

Пусть начальные условия таковы: при $t = 0$ $q_1 = 0$, $q_2 = h$, $\dot{q}_1 = v_0$, $\dot{q}_2 = 0$. Тогда

$$\alpha_1 = mv_0, \quad \alpha_2 = mgh, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0$$

и, следовательно,

$$q_1 = v_0 t, \quad q_2 = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Пример 4.13. Рассмотрим плоское движение материальной точки, притягиваемой к неподвижному центру силой, пропорциональной расстоянию точки от притягивающего центра. Начало системы координат пометим в притягивающем центре.

Примем за обобщенные координаты декартовы координаты $q_1 = x$, $q_2 = y$. Кинетическая и потенциальная энергии выразятся при помощи формул

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad \Pi = \frac{c}{2}(q_1^2 + q_2^2),$$

где m — масса точки, c — коэффициент пропорциональности. Так как $p_1 = m\dot{q}_1$, $p_2 = m\dot{q}_2$, то функция Гамильтона будет

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{c}{2}q_1^2 + \frac{c}{2}q_2^2,$$

и уравнение Гамильтона — Якоби примет вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{c}{2}q_1^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{c}{2}q_2^2 = h.$$

Приняв для W выражение (4.69)

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2),$$

в соответствии с условиями (4.71) получим для определения W_1 и W_2 обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2+\frac{c}{2}q_1^2=\alpha_1,\quad \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2+\frac{c}{2}q_2^2=\alpha_2,$$

причем $h=\alpha_1+\alpha_2$. Отсюда

$$W_1=\int\sqrt{m\left(2\alpha_1-cq_1^2\right)}\,dq_1,\quad W_2=\int\sqrt{m\left(2\alpha_2-cq_2^2\right)}\,dq_2.$$

В соответствии с выражениями (4.72) имеем

$$\frac{dW_1}{d\alpha_1}=\beta_1+t,\quad \frac{dW_2}{d\alpha_2}=\beta_2+t.$$

Но

$$\frac{dW_1}{d\alpha_1}=\sqrt{\frac{m}{c}}\arcsin\frac{q_1}{\sqrt{2\alpha_1/c}},\quad \frac{dW_2}{d\alpha_2}=\sqrt{\frac{m}{c}}\arcsin\frac{q_2}{\sqrt{2\alpha_2/c}}.$$

Следовательно,

$$\arcsin\frac{q_1}{\sqrt{2\alpha_1/c}}=\sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_1),\quad \arcsin\frac{q_2}{\sqrt{2\alpha_2/c}}=\sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_2),$$

отсюда

$$q_1=\sqrt{\frac{2\alpha_1}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_1),\quad q_2=\sqrt{\frac{2\alpha_2}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_2).$$

Так как

$$\frac{dW_1}{dq_1}=p_1=\sqrt{m\left(2\alpha_1-cq_1^2\right)}=m\dot{q}_1,\quad \frac{dW_2}{dq_2}=p_2=\sqrt{m\left(2\alpha_2-cq_2^2\right)}=m\dot{q}_2$$

то, введя начальные условия, можно определить постоянные α_1, α_2, β_1 и β_2. Пусть, например, при $t=0$ $q_1=a$, $q_2=0$, $\dot{q}_1=0$, $\dot{q}_2=v_0$. Уравнениями для определения α_1, α_2, β_1 и β_2 будут

$$a=\sqrt{\frac{2\alpha_1}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\beta_1,\quad 0=\sqrt{\frac{2\alpha_2}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\beta_2,$$

$$\sqrt{m(2\alpha_1-ca^2)}=0,\quad \sqrt{2\alpha_2 m}=mv_0.$$

Отсюда

$$\alpha_1=\frac{ca^2}{2},\quad \alpha_2=\frac{mv_0^2}{2},\quad \beta_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{c}},\quad \beta_2=0$$

и, следовательно,

$$q_1=a\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t,\quad q_2=v_0\sqrt{\frac{m}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t.$$

Таким образом, решение этой задачи свелось к операциям дифференцирования и вычисления квадратур.

Пример 4.14. Применим теорию Якоби к гироскопическому маятнику. Для этой задачи функция Гамильтона имеет вид (см. пример 4.4)

$$H=\frac{1}{2A}\left[p_2^2+\frac{(p_1-p_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}\right]+\frac{p_3^2}{2I_y}+(m_1l_1-m_2l_2)g\cos q_2.$$

Напишем уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{1}{2A}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{\sin^2 q_2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}-\frac{\partial W}{\partial q_3}\cos q_2\right)^2\right]+\frac{1}{2I_y}\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2+(m_1l_1-m_2l_2)g\cos q_2=h.$$

Координаты q_1 и q_3 — циклические; поэтому, если решение искать в виде

$$W=\alpha_1q_1+W_2(q_2)+\alpha_3q_3,$$

получим

$$\frac{1}{2A}\left[\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2+\frac{(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}\right]+\frac{\alpha_3^2}{2I_y}+(m_1l_1-m_2l_2)g\cos q_2=h. \quad (4.75)$$

Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Приняв $h=\alpha_0$, на основании выражений (4.73) имеем

$$\frac{\partial W_2}{\partial\alpha_2}=t-t_0,\quad \frac{\partial W_2}{\partial\alpha_1}=-q_1+\beta_1,\quad \frac{\partial W_2}{\partial\alpha_3}=-q_3+\beta_3.$$

Перепишем уравнение (4.75) в виде

$$\sin q_2\frac{dW_2}{dq_2}=$$
$$=\sqrt{2A\left[(m_2l_2-m_1l_1)g\sin^2 q_2\cos q_2+\left(\alpha_2-\frac{\alpha_3^2}{2I_y}\right)\sin^2 q_2\right]-(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)^2}$$

или

$$W_2=$$
$$=\int\sqrt{2A\left[(m_2l_2-m_1l_1)g\cos q_2+\left(\alpha_2-\frac{\alpha_3^2}{2I_y}\right)\right]-\frac{(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}}\,dq_2=$$
$$=\int D\,dq_2,$$

где

$$D=\sqrt{2A\left[(m_2l_2-m_1l_1)g\cos q_2+\left(\alpha_2-\frac{\alpha_3^2}{2I_y}\right)\right]-\frac{(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}}.$$

Окончательно получим

$$\int\frac{A\,dq_2}{D}=t-t_0,\qquad -\int\frac{(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)\,dq_2}{D\sin^2 q_2}=-q_1+\beta_1,$$
$$-\int\left[\frac{2A\alpha_3}{I_y}-\frac{2(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)\cos q_2}{\sin^2 q_2}\right]\frac{dq_2}{D}=-q_3+\beta_3.$$

Таким образом, задача свелась к квадратурам.

Как было показано, применение метода разделения переменных позволяет получить полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Однако этот метод не всегда применим. Поэтому естественно заранее выяснить, при каком виде гамильтоновой

функции (или отдельно кинетической и потенциальной энергий) возможно применение метода разделения переменных. Исследованию этого вопроса были посвящены работы Лиувилля, Штеккеля, Гурса и др.*).

Остановимся лишь на рассмотрении практически важного случая Лиувилля. Если в голономной системе с n степенями свободы кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$T=\frac{1}{2}f\sum_{i=1}^{n}A_i(q_i)\dot{q}_i^2,\quad \Pi=\frac{1}{f}\sum_{i=1}^{n}\Pi_i(q_i),\tag{4.76}$$

где $f=\sum_{i=1}^{n}F_i(q_i)$, то интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби приводит к квадратурам (*теорема Лиувилля*).

Для доказательства этой теоремы введем функцию Гамильтона. В соответствии с выражениями (4.76) имеем

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=fA_i(q_i)\dot{q}_i\quad (i=1, 2, \ldots, n).\tag{4.77}$$

Составим функцию Гамильтона

$$H=T+\Pi=\frac{1}{2}f\sum_{i=1}^{n}A_i(q_i)\dot{q}_i^2+\frac{1}{f}\sum_{i=1}^{n}\Pi_i(q_i)=h,$$

или, учитывая соотношение (4.77),

$$H=\frac{1}{f}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i^2}{2A_i(q_i)}+\Pi_i(q_i)\right]=h.$$

Вводя замену

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},$$

получим уравнение Гамильтона — Якоби

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2A_i(q_i)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2+\Pi_i(q_i)-hF_i(q_i)\right]=0.\tag{4.78}$$

Будем искать полный интеграл этого уравнения в виде

$$W=W_1(q_1)+W_2(q_2)+\ldots+W_n(q_n).$$

Уравнение (4.78) при этом примет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2A_i(q_i)}\left(\frac{dW_i}{dq_i}\right)^2+\Pi_i(q_i)-hF_i(q_i)\right]=0.$$

---

*) Изложение результатов этих работ можно найти в книгах [30, 34].

Каждое слагаемое левой части последнего уравнения зависит только от одной обобщенной координаты q_i, поэтому можно применить метод разделения переменных. Уравнению (4.78) можно удовлетворить, если каждое из слагаемых приравнять постоянной величине:

$$\frac{1}{2A_i(q_i)}\left(\frac{dW_i}{dq_i}\right)^2 + \Pi_i(q_i) - hF_i(q_i) = \alpha_i, \tag{4.79}$$

причем должно выполняться условие

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0.$$

Каждое из уравнений (4.79) является дифференциальным уравнением первого порядка, интегрирование которого сводится к квадратуре

$$W_i = \int \sqrt{2A_i(q_i)\left[\alpha_i + hF_i(q_i) - \Pi_i(q_i)\right]}\, dq_i.$$

Следовательно, полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$W = \sum_{i=1}^{n} \int \sqrt{2A_i(q_i)\left[\alpha_i + hF_i(q_i) - \Pi_i(q_i)\right]}\, dq_i.$$

Этот интеграл содержит n произвольных постоянных

$$h,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$$

и постоянную α_n, которая равна

$$\alpha_n = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}).$$

Таким образом, теорема Лиувилля доказана.

Пример 4.15. Для обобщенных координат $q_1 = \lambda$, $q_2 = \mu$ в примере 4.3 кинетическая и потенциальная энергии имеют вид, соответствующий выражениям (4.76). Поэтому при интегрировании уравнения Гамильтона — Якоби можно применить метод разделения переменных.

В этом случае функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2ma^2\left(q_1^2 - q_2^2\right)}\left[p_1^2\left(q_1^2 - 1\right) + p_2^2\left(1 - q_2^2\right)\right] - \\ - \frac{m}{a\left(q_1^2 - q_2^2\right)}\left[(c_1 + c_2)\,q_1 - (c_1 - c_2)\,q_2\right]$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2\left(q_1^2 - 1\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2\left(1 - q_2^2\right) - 2m^2a\left[(c_1 + c_2)\,q_1 - (c_1 - c_2)\,q_2\right] - \\ - 2ma^2h\left(q_1^2 - q_2^2\right) = 0.$$

Принимая, что

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2),$$

получим

$$\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 (q_1^2 - 1) - 2m^2a(c_1 + c_2)q_1 - 2ma^2hq_1^2 + \\ + \left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 (1 - q_2^2) + 2m^2a(c_1 - c_2)q_2 + 2ma^2hq_2^2 = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если

$$\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 (q_1^2 - 1) - 2m^2a(c_1 + c_2)q_1 - 2ma^2hq_1^2 = \alpha_1,$$

$$\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 (1 - q_2^2) + 2m^2a(c_1 - c_2)q_2 + 2mha^2q_2^2 = -\alpha_1.$$

Отсюда имеем

$$W_1 = \int \sqrt{\frac{\alpha_1 + 2m^2a(c_1 + c_2)q_1 + 2ma^2hq_1^2}{q_1^2 - 1}}\, dq_1,$$

$$W_2 = \int \sqrt{\frac{-\alpha_1 - 2m^2a(c_1 - c_2)q_2 - 2ma^2hq_2^2}{1 - q_2^2}}\, dq_2.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$W = W_1 + W_2$$

содержит две произвольные постоянные α_1 и h. Конечные интегралы уравнений движения найдем, применяя формулы (4.62) и (4.63):

$$\int \frac{ma^2q_1^2\, dq_1}{\sqrt{q_1^2 - 1}\sqrt{\alpha_1 + 2m^2a(c_1 + c_2)q_1 + 2ma^2hq_1^2}} + \\ + \int \frac{ma^2q_2^2\, dq_2}{\sqrt{q_2^2 - 1}\sqrt{\alpha_1 + 2m^2a(c_1 - c_2)q_2 + 2ma^2hq_2^2}} = t - t_0,$$

$$\int \frac{dq_1}{2\sqrt{q_1^2 - 1}\sqrt{\alpha_1 + 2m^2a(c_1 + c_2)q_1 + 2ma^2hq_1^2}} + \\ + \int \frac{dq_2}{2\sqrt{q_2^2 - 1}\sqrt{\alpha_1 + 2m^2a(c_1 - c_2)q_2 + 2ma^2hq_2^2}} = \beta_1,$$

т. е. задача сводится к квадратурам.

Рассмотрим особенности применения метода Остроградского — Якоби к материальным системам, совершающим периодические движения. Использование этого метода целесообразно в тех случаях, когда не требуется полного исследования поведения материальной системы, а требуется определить только частоты периодических движений *).

*) Более подробное рассмотрение этого вопроса можно найти в книге [19].

Мы рассмотрим только такие материальные системы, для которых возможен выбор канонических переменных, допускающих полную разделимость переменных, т. е. такие системы, для которых функция W определяется из уравнения

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), \varphi_2\left(q_2, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right), \ldots, \varphi_n\left(q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)\right] = h. \qquad (4.80)$$

В этом случае W может быть представлена в виде

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

В соответствии с выражением (4.71) уравнение (4.80) примет вид

$$H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = h.$$

Так как

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (4.81)$$

то

$$p_i = p_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \qquad (4.82)$$

Пусть q_i и p_i — координатные оси прямоугольной декартовой системы координат. Плоскость этих переменных называют *фазовой плоскостью*. Точка на этой плоскости с координатами (q_i, p_i) называется *изображающей точкой*. При движении системы изображающая точка описывает кривую, которую называют *фазовой кривой*.

В дальнейшем мы будем предполагать, что на фазовых плоскостях q_ip_i фазовые кривые (4.82) будут или замкнуты, или p_i будет периодической функцией относительно q_i.

Введем в рассмотрение новые переменные $J_1, J_2, \ldots, J_n$, которые называются *действиями* и определяются формулами

$$J_i = \oint p_i\, dq_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (4.83)$$

где символ $\oint$ означает, что интеграл берется за полный период изменения q_i. В соответствии с выражением (4.81) имеем

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i} dq_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4.84)$$

Переменные J_i являются функциями независимых величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; так как изменение каждой пары q_i, p_i (по предположению) независимо, то переменные J_i также независимы. Эти переменные J_i примем за новые обобщенные импульсы.

Выразим теперь величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ с помощью соотношений (4.84) через $J_1, J_2, \ldots, J_n$ и внесем полученные значения

в выражения для W и H. В результате этого получим

$$W = W(q_1, q_2, \ldots, q_n, J_1, J_2, \ldots, J_n)$$

и

$$H(J_1, J_2, \ldots, J_n) = h.$$

За обобщенные координаты, соответствующие обобщенным импульсам, примем величины

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Величины w_i называются *угловыми переменными*. В соответствии с выражениями (4.50)

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \nu_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.85}$$

где ν_i — постоянные величины, являющиеся функциями J_1, J_2, J_3, ..., J_n. Из соотношений (4.85) следует

$$w_i = \nu_i t + \beta_i, \tag{4.86}$$

где β_i — постоянные интегрирования. Пусть τ_i — период изменения функции w_i. Тогда

$$w_i(t + \tau_i) = \nu_i(t + \tau_i) + \beta_i. \tag{4.87}$$

Вычитая из выражения (4.87) выражение (4.86), получим изменение w_i за период:

$$\Delta w_i = \nu_i \tau_i. \tag{4.88}$$

С другой стороны, изменение Δw_i можно получить следующим образом. Согласно выражению (4.85)

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}.$$

Пусть теперь координаты $q_1, q_2, \ldots, q_{r-1}, q_{r+1}, \ldots, q_n$ сохраняют постоянные значения, а координата q_r совершает полный цикл своего изменения. Тогда функция w_i изменится на величину

$$\Delta w_i = \oint d'w_i,$$

где

$$d'w_i = \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \, \partial q_r} dq_r$$

— изменение w_i вследствие изменения q_r. Таким образом,

$$\Delta w_i = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \, \partial q_r} dq_r,$$

или

$$\Delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_r} dq_r.$$

В соответствии с формулами (4.81) и (4.83)

$$\Delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_r \, dq_r = \frac{\partial J_r}{\partial J_i}.$$

Отсюда следует, что если $r = i$, то

$$\Delta w_i = 1; \qquad (4.89)$$

если же $r \neq i$, то $\Delta w_i = 0$. Сравнивая выражения (4.88) и (4.89), получим $\nu_i \tau_i = 1$ и

$$\nu_i = \frac{1}{\tau_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, величины ν_i представляют собой частоты периодических изменений q_i.

Пример 4.16. Найти частоты главных колебаний механической системы, состоящей из двух физических маятников, представляющих собой однородные стержни одинаковых поперечных размеров и сделанных из одного и того же материала. Маятники подвешены на одной горизонтали при помощи шарниров O_1, O_2 и соединены между собой пружиной, жесткость которой равна c. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна расстоянию между точками подвеса маятников. Остальные размеры указаны на рис. 4.6.

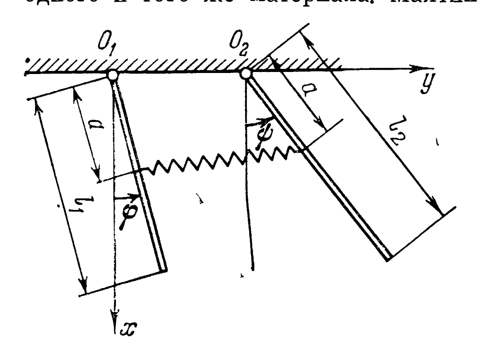


Рис. 4.6

Положение маятников будем определять углами их отклонения от вертикали, т. е. углами φ и ψ. Выражение для кинетической энергии в этом случае имеет вид

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\psi}^2,$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции маятников относительно их осей вращения. Потенциальная энергия выражается формулой

$$\Pi = m_1 g \frac{l_1}{2} (1 - \cos\varphi) + m_2 g \frac{l_2}{2} (1 - \cos\psi) + \frac{c\lambda^2}{2},$$

где m_1 и m_2 — массы маятников, λ — удлинение пружины. Для малых отклонений

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \cos\psi \approx 1 - \frac{\psi^2}{2}, \quad \lambda = |a\varphi - a\psi|;$$

следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[\left(m_1 g \frac{l_1}{2} + ca^2\right)\varphi^2 + \left(m_2 g \frac{l_2}{2} + ca^2\right)\psi^2 - 2ca^2\varphi\psi\right].$$

Для упрощения выкладок рассмотрим частный случай, когда $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$, $I_1 = I_2 = I$. В этом случае

$$T = \frac{1}{2} I (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}\left[a_1(\varphi^2 + \psi^2) - 2ca^2\varphi\psi\right],$$

где $a_1 = m \; \frac{l}{2} + ca^2$.

Если теперь составить уравнение Гамильтона — Якоби, то обнаружится, что переменные не разделяются. Поэтому мы перейдем к другим координатам q_1 и q_2, которые связаны с координатами φ и ψ формулами *)

$$\varphi = q_1 + q_2, \quad \psi = q_1 - q_2.$$

Кинетическая и потенциальная энергии принимают вид

$$T = I\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right), \quad \Pi = a_2 q_1^2 + \left(a_2 + 2ca^2\right) q_2^2,$$

где $a_2 = \frac{mgl}{2}$. Так как $p_1 = 2I\dot{q}_1$, $p_2 = 2I\dot{q}_2$, то уравнение (4.80) примет вид

$$\frac{1}{4I}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + a_2 q_1^2 + \frac{1}{4I}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(a_2 + 2ca^2\right) q_2^2 = h. \quad (4.90)$$

Учитывая, что это уравнение пмеет вид уравнения (4.80), получим

$$\frac{1}{4I}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 + a_2 q_1^2 + \frac{1}{4I}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 + \left(a_2 + 2ca^2\right) q_2^2 = h.$$

В соответствии с зависимостями (4.71)

$$\frac{1}{4I}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 + a_2 q_1^2 = \alpha_1, \quad \frac{1}{4I}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 + \left(a_2 + 2ca^2\right) q_2^2 = \alpha_2,$$

т. е.

$$H = \alpha_1 + \alpha_2. \quad (4.91)$$

Теперь найдем

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} = \frac{dW_1}{dq_1} = 2\sqrt{Ia_2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{a_2} - q_1^2},$$

$$p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2} = \frac{dW_2}{dq_2} = 2\sqrt{I\left(a_2 + 2ca^2\right)}\sqrt{\frac{\alpha_2}{a_2 + 2ca^2} - q_2^2}.$$

Используя формулы (4.84), получим

$$J_1 = 2\sqrt{Ia_2}\oint\sqrt{\frac{\alpha_1}{a_2} - q_1^2}\,dq_1,$$

$$J_2 = 2\sqrt{I\left(a_2 + 2ca^2\right)}\oint\sqrt{\frac{\alpha_2}{a_2 + 2ca^2} - q_2^2}\,dq_2.$$

Введя в эти выражения замену

$$q_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{a_2}}\sin\gamma, \quad q_2 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{a_2 + 2ca^2}}\sin\chi,$$

получим

$$J_1 = 2\sqrt{\frac{I}{a_2}}\alpha_1\int_0^{2\pi}\cos^2\gamma\,d\gamma = 2\pi\sqrt{\frac{I}{a_2}}\alpha_1. \quad (4.92)$$

---

*) Вводимые координаты q_1 и q_2 представляют собой нормальные координаты, т. е. координаты, для которых выражения для кинетической и потенциальной энергий не содержат членов с произведениями обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Аналогично

$$J_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{a_2 + 2ca^2}}\,\alpha_2. \tag{4.93}$$

Из выражений (4.92) и (4.93) следует

$$\alpha_1 = \frac{J_1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2}{I}}, \quad \alpha_2 = \frac{J_2}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2 + 2ca^2}{I}}.$$

Равенство (4.91) теперь принимает вид

$$H = \frac{J_1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2}{I}} + \frac{J_2}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2 + 2ca^2}{I}}.$$

Следовательно,

$$\nu_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l}},$$

$$\nu_2 = \frac{\partial H}{\partial J_2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2 + 2ca^2}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{6ca^2}{ml^2}},$$

так как

$$a_2 = \frac{mgl}{2}, \quad I = \frac{ml^2}{3}.$$

§ 4.6. Метод вариации произвольных постоянных. Канонические уравнения возмущенного движения

Излагаемый в этом параграфе метод относится к каноническим уравнениям, являясь частным случаем приложения методов теории возмущений. Для уравнений движения, записанных в форме уравнений Лагранжа второго рода, этот метод описан в книге [9], где приведены также примеры его эффективного использования.

Предположим, что движение рассматриваемой динамической системы описывается каноническими уравнениями

$$\dot{q}_i = \frac{\partial (H + H^*)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial (H + H^*)}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.94}$$

где H — функция Гамильтона, составленная для системы при ее движении под действием основных сил, а функция H^* учитывает дополнительные (возмущающие) силы. Считая, что решения

$$\begin{gathered} q_i = q_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \\ p_i = p_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \\ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{4.95}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — независимые постоянные, системы уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.96}$$

известны, будем искать решение системы уравнений (4.94) в форме (4.95), считая, что величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — функции времени. Предполагая, что уравнения (4.95) можно разрешить относительно величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, получим

$$\begin{gathered} \alpha_i = \alpha_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ \beta_i = \beta_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{4.97}$$

Найдем производные от α_i и β_i по времени:

$$\begin{gathered} \dot{\alpha}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right), \\ \dot{\beta}_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \beta_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

Учитывая уравнения (4.94), перепишем эти выражения в виде

$$\begin{gathered} \dot{\alpha}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k} \frac{\partial (H + H^*)}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_k} \frac{\partial (H + H^*)}{\partial q_k} \right], \\ \dot{\beta}_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \beta_i}{\partial q_k} \frac{\partial (H + H^*)}{\partial p_k} - \frac{\partial \beta_i}{\partial p_k} \frac{\partial (H + H^*)}{\partial q_k} \right] \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

Вспоминая определение и свойства скобок Пуассона (4.22), можем записать

$$\begin{gathered} \dot{\alpha}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i, H + H^*) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i, H) + (\alpha_i, H^*), \\ \dot{\beta}_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + (\beta_i, H + H^*) = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + (\beta_i, H) + (\beta_i, H^*) \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

Поскольку функции (4.97) при постоянных α_i и β_i являются интегралами системы уравнений (4.96), то в силу условий (4.24)

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i, H) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} + (\beta_i, H) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_i &= (\alpha_i, H^*) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial p_k} - \frac{\partial\alpha_i}{\partial p_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right),\\ \dot{\beta}_i &= (\beta_i, H^*) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial p_k} - \frac{\partial\beta_i}{\partial p_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right)\\ &(i = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned} \tag{4.98}$$

Уравнения (4.98) являются уравнениями возмущенного движения.

В § 4.5 было показано, что если можно найти решение

$$\psi = \psi(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

(где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные) уравнения Гамильтона — Якоби

$$H\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{4.99}$$

то решением системы (4.96) будут соотношения

$$p_i = \frac{\partial\psi}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.100}$$

в которых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — произвольные постоянные. Решая эти уравнения относительно q_i и p_i, мы и получим выражения (4.95).

Поскольку решение системы (4.94) ищется в форме (4.95), то, считая $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ функциями времени, выражения (4.95) можно рассматривать как преобразование переменных q_i и p_i системы (4.94) к новым переменным β_i и α_i. Покажем, что такое преобразование будет каноническим. Для этого нужно показать, что выражение (4.40), т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - (H + H^*) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dot{\beta}_i - H' + \frac{dV}{dt}, \tag{4.101}$$

при выполнении условий (4.99) удовлетворяется тождественно. Выбрав функцию V в виде

$$V = \psi(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i,$$

найдем

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\dot{\alpha}_i\beta_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dot{\beta}_i.$$

Подставляя эту производную в выражение (4.101) и учитывая условия (4.100), получим

$$-(H + H^*) = -H' + \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

т. е. преобразование будет каноническим, если новая функция Гамильтона равна

$$H' = H^* + H + \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Но в силу уравнения (4.99)

$$H + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

и, следовательно, $H' = H^*$.

Таким образом, новые переменные будут удовлетворять каноническим уравнениям вида

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial\beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = \frac{\partial H^*}{\partial\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4.102)$$

Пример 4.17. Движение материальной точки относительно вращающейся Земли*).

Будем считать Землю однородным шаром радиуса R. Пусть точка A на земной поверхности определяется полюсным углом ϑ_0 (рис. 4.7) и долготой λ_0. Исследование движения точки проведем относительно системы координат $Axyz$, у которой ось x направлена по касательной к меридиану на север, ось y — по касательной к параллели на запад и ось z — по направлению радиуса Земли от центра Земли.

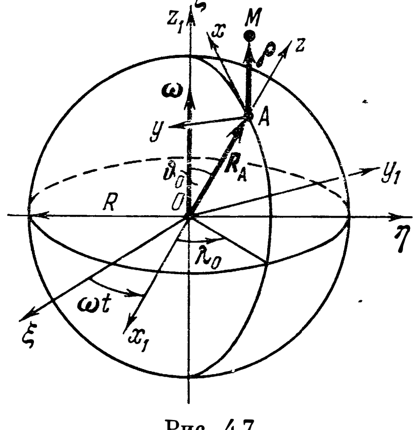


Рис. 4.7

Скорость точки по отношению к инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$, имеющей начало в центре Земли, равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ — скорость точки A, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость Земли, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор материальной точки, определяющий ее положение по отношению к точке A, $\mathbf{v}_r$ — скорость материальной точки относительно системы координат $Axyz$. Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы системы координат $Axyz$, то

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}\omega \sin\vartheta_0 + \mathbf{k}\omega\cos\vartheta_0,$$
$$\mathbf{v}_A = -\mathbf{j}\omega R \sin\vartheta_0, \quad \mathbf{R}_A = R\mathbf{k},$$
$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_r = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

и, следовательно,

$$v_x = \dot{x} - \omega y \cos\vartheta_0,$$
$$v_y = \dot{y} + \omega(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0) - \omega R \sin\vartheta_0,$$
$$v_z = \dot{z} + \omega y \sin\vartheta_0.$$

*) Этот пример в более общей постановке рассмотрен в книге [30].

Принимая $m = 1$, получим следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \right.$$
$$+ 2\omega\left[\left(\dot{z}\sin\vartheta_0 - \dot{x}\cos\vartheta_0\right)y + \dot{y}\left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0 - R\sin\vartheta_0\right)\right] +$$
$$\left. + \omega^2\left[y^2 + \left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0 - R\sin\vartheta_0\right)^2\right]\right\}.$$

Отсюда

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \omega y\cos\vartheta_0,$$
$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + \omega\left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0\right) - \omega R\sin\vartheta_0,$$
$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \dot{z} + \omega y\sin\vartheta_0.$$

Составим выражение для функции Гамильтона:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - (T - \Pi),$$

где $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, Π — потенциальная энергия силы тяготения Земли. В нашем случае

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}\omega^2\left[y^2 + \left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0 - R\sin\vartheta_0\right)^2\right] + \Pi,$$

или

$$H = \frac{1}{2}\left\{(p_1 + \omega y\cos\vartheta_0)^2 + [p_2 + \omega R\sin\vartheta_0 - \omega\left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0\right)]^2 + \right.$$
$$\left. + (p_3 - \omega y\sin\vartheta_0)^2\right\} - \frac{1}{2}\omega^2\left[y^2 + \left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0 - R\sin\vartheta_0\right)^2\right] + \Pi.$$

Если точка падает в пустоте без начальной скорости, то время ее падения измеряется несколькими секундами. Так, например, если высота $h = 1000$ м, то $t_1 = \sqrt{2h/g} \approx 14$ с. Поэтому примем за малый параметр безразмерную величину $\mu = \omega t_1$, где ω — угловая скорость вращения Земли, равная

$$\omega \approx \frac{2\pi}{24\,60\,60} \approx \frac{1}{13713}\ \text{рад/с}.$$

Следовательно,

$$\mu \approx \frac{1}{1371314} \approx \frac{1}{1000}.$$

Функцию H теперь можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2}\left\{\left(p_1 + \frac{\mu}{t_1}y\cos\vartheta_0\right)^2 + \left[p_2 + \frac{\mu}{t_1}R\sin\vartheta_0 - \frac{\mu}{t_1}(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0)\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left(p_3 - \frac{\mu}{t_1}y\sin\vartheta_0\right)^2\right\} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{t_1^2}\left[y^2 + \left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0 - R\sin\vartheta_0\right)^2\right] + \Pi.$$

Введем преобразование

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z,$$
$$p_1 = p_1', \quad p_2 = p_2' - \omega R \cos\vartheta_0, \quad p_3 = p_3'.$$

Это преобразование является каноническим *). Произведя замену переменных и пренебрегая членами, содержащими множители μ^2, получим

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^3\right) + \\ + \omega\left[\left(p_1'\cos\vartheta_0 - p_3'\sin\vartheta_0\right)y - p_2'(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0)\right] + \Pi.$$

Потенциальная энергия выражается формулой

$$\Pi = -\frac{gR^2}{r}.$$

Поскольку

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+R)^2}$$

и

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + \ldots,$$

то получим **)

$$\frac{R}{r} = \left(1 + \frac{2z}{R} + \frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{z}{R} - \frac{x^2+y^2-2z^2}{2R^2} + \ldots$$

---

*) Рассмотрим преобразование

$$q_i = q_i', \quad p_i = p_i' + \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Покажем, что если в качестве функции V взять любую функцию от старых координат и времени $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$, то условие (4.40)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} p_i'\dot{q}_i' - H' + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

выполняется тождественно. Используя рассматриваемое преобразование, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i' + \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} p_i'\dot{q}_i - H' + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_i}\dot{q}_i.$$

Это выражение выполняется тождественно, если

$$H' = H + \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Выбирая в рассматриваемой задаче функцию

$$V = -\omega Ry\sin\vartheta_0,$$

имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad H' = H.$$

**) Мы ограничиваемся указанными членами, считая, что точка движется вблизи поверхности Земли и, следовательно, z достаточно мало.

Следовательно,

$$\Pi = -gR + gz + g\,\frac{x^2+y^2-2z^2}{2R}.$$

Итак, выражение для функции Гамильтона H принимает вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2\right) + \omega\left[\left(p_1'\cos\vartheta_0 - p_3'\sin\vartheta_0\right)y - p_2'\left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0\right)\right] + gz + g\,\frac{x^2+y^2-2z^2}{2R} = H_0 + H^*,$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 + 2gz\right),$$

$$H^* = \omega\left[\left(p_1'\cos\vartheta_0 - p_3'\sin\vartheta_0\right)y - p_2'\left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0\right)\right] + g\,\frac{x^2+y^2-2z^2}{2R}.$$

Решение уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i' = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i'}$$

имеет вид

$$p_1' = \alpha_1, \qquad p_2' = \alpha_2, \qquad p_3' = \alpha_3 - gt,$$

$$x = \alpha_1 t + \beta_1, \quad y = \alpha_2 t + \beta_2, \quad z = \alpha_3 t + \beta_3 - \frac{gt^2}{2},$$

где α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 — постоянные интегрирования. Подставим теперь это решение в выражение функции H^*:

$$H^* = \omega\left\{\alpha_1(\alpha_2 t + \beta_2)\cos\vartheta_0 - (\alpha_3 - gt)(\alpha_2 t + \beta_2)\sin\vartheta_0 - \alpha_2\left[(\alpha_1 t + \beta_1)\cos\vartheta_0 - \left(\alpha_3 t + \beta_3 - \frac{gt^2}{2}\right)\sin\vartheta_0\right]\right\} + \frac{g}{2R}\left[(\alpha_1 t + \beta_1)^2 + (\alpha_2 t + \beta_2)^2 - 2\left(\alpha_3 t + \beta_3 - \frac{gt^2}{2}\right)^2\right].$$

Составим уравнения (4.102):

$$\dot{\beta}_1 = \omega\beta_2\cos\vartheta_0 + \frac{gt}{R}(\alpha_1 t + \beta_1),$$

$$\dot{\beta}_2 = \omega\beta_3\sin\vartheta_0 - \omega\beta_1\cos\vartheta_0 + \frac{1}{2}\omega g t^2\sin\vartheta_0 + \frac{gt}{R}(\alpha_2 t + \beta_2),$$

$$\dot{\beta}_3 = -\omega\beta_2\sin\vartheta_0 - \frac{2gt}{R}\left(\alpha_3 t + \beta_3 - \frac{gt^2}{2}\right),$$

$$\dot{\alpha}_1 = \omega\alpha_2\cos\vartheta_0 - \frac{g}{R}(\alpha_1 t + \beta_1),$$

$$\dot{\alpha}_2 = -\omega\alpha_1\cos\vartheta_0 + \omega\alpha_3\sin\vartheta_0 - \frac{g}{R}(\alpha_2 t + \beta_2) - \omega g t\sin\vartheta_0,$$

$$\dot{\alpha}_3 = -\omega\alpha_2\sin\vartheta_0 + \frac{2g}{R}\left(\alpha_3 t + \beta_3 - \frac{1}{2}gt^2\right).$$

Решение этих уравнений проведем приближенным путем: заменяя в правых частях уравнений величины всех α и β их начальными значениями α_0 и β_0 и интегрируя, получим

$$\beta_1 = \beta_{10} + \omega t \beta_{20} \cos\vartheta_0 + \frac{g}{R}\left(\alpha_{10}\frac{t^3}{3} + \beta_{10}\frac{t^2}{2}\right),$$

$$\beta_2 = \beta_{20} + \omega t \beta_{30} \sin\vartheta_0 - \omega\beta_{10} t \cos\vartheta_0 + \frac{1}{6}\omega g t^3 \sin\vartheta_0 + \frac{g}{R}\left(\alpha_{20}\frac{t^3}{3} + \beta_{20}\frac{t^2}{2}\right),$$

. . . .

$$\alpha_3 = \alpha_{30} - \omega\alpha_{20} t \sin\vartheta_0 + \frac{2g}{R}\left(\alpha_{30}\frac{t^2}{2} + \beta_{30} - \frac{1}{6}gt^3\right)$$

и, следовательно,

$$x = \beta_{10} + \alpha_{10} t + \omega\left(\beta_{20} t + \alpha_{20} t^2\right)\cos\vartheta_0 - \frac{g}{R}\left(\alpha_{10}\frac{t^3}{6} + \beta_{10}\frac{t^2}{2}\right),$$

$$y = \beta_{20} + \alpha_{20} t - \omega\left(\beta_{10} t + \alpha_{10} t^2\right)\cos\vartheta_0 + \omega\left(\beta_{30} t + \alpha_{30} t^2\right)\sin\vartheta_0 - \frac{g}{R}\left(\alpha_{20}\frac{t^3}{6} + \beta_{20}\frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\vartheta_0,$$

$$z = \beta_{30} + \alpha_{30} t - \omega\left(\beta_{20} t + \alpha_{20} t^2\right)\sin\vartheta_0 + \frac{2g}{R}\left(\alpha_{30}\frac{t^3}{6} + \beta_{30}\frac{t^2}{2} - \frac{gt^4}{24}\right) - \frac{gt^2}{2}.$$

После дифференцирования по времени получим

$$\dot{x} = \alpha_{10} + \omega(\beta_{20} + 2\alpha_{20} t)\cos\vartheta_0 - \frac{g}{R}\left(\alpha_{10}\frac{t^2}{2} + \beta_{10} t\right),$$

$$\dot{y} = \alpha_{20} - \omega(\beta_{10} + 2\alpha_{10} t)\cos\vartheta_0 + \omega(\beta_{30} + 2\alpha_{30} t)\sin\vartheta_0 - \frac{g}{R}\left(\alpha_{20}\frac{t^2}{2} + \beta_{20} t\right) - \omega g t^2 \sin\vartheta_0,$$

$$\dot{z} = \alpha_{30} - \omega(\beta_{20} + 2\alpha_{20} t)\sin\vartheta_0 + \frac{2g}{R}\left(\alpha_{30}\frac{t^2}{2} + \beta_{30} t - \frac{gt^3}{6}\right) - gt.$$

Пусть начальными условиями движения материальной точки будут: при $t = 0$ $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$, $\dot{z} = \dot{z}_0$. Тогда величины α_{10}, α_{20}, α_{30}, β_{10}, β_{20}, β_{30} определяются из уравнений

$$x_0 = \beta_{10}, \quad y_0 = \beta_{20}, \quad z_0 = \beta_{30},$$

$$\dot{x}_0 = \alpha_{10} + \omega\beta_{20}\cos\vartheta_0, \quad \dot{y}_0 = \alpha_{20} - \omega\beta_{10}\cos\vartheta_0 + \omega\beta_{30}\sin\vartheta_0,$$

$$\dot{z}_0 = \alpha_{30} - \omega\beta_{20}\sin\vartheta_0.$$

Если $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = h$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$, то $\beta_{10} = 0$, $\beta_{20} = 0$, $\beta_{30} = h$, $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{20} = -\omega h \sin\vartheta_0$, $\alpha_{30} = 0$ и с точностью до μ^2

$$x \approx 0, \quad y = -\frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\vartheta_0, \quad z = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Формула для y дает восточное отклонение падающей без начальной скорости точки.

Пример 4.18. Тело массы m, связанное с неподвижной опорой при помощи «нелинейной» пружины (рис. 4.8), может перемещаться по горизонтальным гладким прямолинейным направляющим.

Поместим начало координат в точке O на расстоянии l от точки крепления, где l — длина расслабленной пружины. Примем за обобщенную координату $q = x$ отклонение тела от начала координат. Кинетическая энергия T тела и обобщенная сила Q выражаются формулами

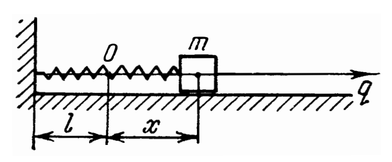


Рис. 4.8

$$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2, \quad Q = -cq - \mu q^3,$$

где c — жесткость «линейной» пружины, μ — достаточно малый параметр. При $\mu > 0$ пружина называется жесткой, а при $\mu < 0$ мягкой. Используя метод малых возмущений, рассмотрим, каков характер влияния нелинейности пружины на малые колебания тела. Согласно (3.11) потенциальная энергия системы

$$\Pi = -\int_0^q Q\,dq = \int_0^q (cq + \mu q^3)\,dq = \frac{1}{2} cq^2 + \frac{\mu}{4} q^4.$$

Отсюда функция Гамильтона $H_0 = H + H^*$, где

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{c}{2} q^2, \quad H^* = \frac{\mu}{4} q^4.$$

При $\mu = 0$ (линейная пружина) масса m совершает гармонические колебания по закону

$$q = \alpha \sin kt + \beta \cos kt, \qquad k^2 = c/m. \tag{4.103}$$

Для решения нелинейной задачи ($\mu \neq 0$) нужно согласно методу малых возмущений проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (4.102), которые в нашем случае имеют вид:

$$\dot{\alpha} = -\mu \cos kt(\alpha \sin kt + \beta \cos kt)^3, \quad \dot{\beta} = \mu \sin kt(\alpha \sin kt + \beta \cos kt)^3.$$

Так как нас интересует лишь та составляющая решения этих уравнений, которая медленно изменяется во времени, то для ее нахождения усредним правые части этих уравнений за период $T = 2\pi/k$, после чего приходим к уравнениям

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \cos\tau\,(\alpha \sin\tau + \beta\cos\tau)^3\,d\tau,$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\mu}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \sin\tau\,(\alpha \sin\tau + \beta\cos\tau)^3\,d\tau,$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{3\mu\beta}{8k}(\alpha^2 + \beta^2), \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{3\mu\alpha}{8k}(\alpha^2 + \beta^2). \tag{4.104}$$

Разделив второе уравнение на первое, получаем

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Отсюда $\alpha^2+\beta^2=A^2=\text{const}$. Обозначим $\Omega=3\mu A^2/(8k)$, после чего уравнения (4.104) записываются в виде

$$\dot{\alpha}=-\Omega\beta, \quad \dot{\beta}=\Omega\alpha.$$

Решение этих уравнений:

$$\alpha=b\cos\Omega t+a\sin\Omega t, \quad \beta=b\sin\Omega t-a\cos\Omega t. \tag{4.105}$$

Подставляя найденные величины α, β как функции времени в (4.103), находим

$$q=a\sin(k+\Omega)t+b\cos(k+\Omega)t. \tag{4.106}$$

Из (4.105) следует, что

$$A^2=\alpha^2+\beta^2=a^2+b^2,$$

т. е. A — амплитуда колебаний осциллятора с нелинейной пружиной. Поэтому найденный закон движения (4.106), который можно записать в виде

$$q=a\sin[k+3\mu(a^2+b^2)/(8k)]t+b\cos[k+3\mu(a^2+b^2)/(8k)]t,$$

говорит о том, что если частота k колебаний линейного осциллятора не зависит от амплитуды колебаний, то частота колебаний нелинейного осциллятора зависит от амплитуды колебаний. С увеличением амплитуды частота колебаний возрастает у осциллятора с жесткой пружиной и уменьшается у осциллятора с мягкой пружиной.

§ 4.7. Метод интегральных инвариантов

До сих пор излагались методы интегрирования канонических уравнений, т. е. методы отыскания интегралов движения $f_i=c_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — таких функций f_i, зависящих от переменных $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ и, может быть, времени t, которые при подстановке в них решения канонических уравнений обращаются в постоянную величину. Существуют интегральные выражения

$$\int\limits_{V_r} F(q, p, t)\,dV_r,$$

где V_r — область интегрирования в расширенном фазовом пространстве системы материальных точек, которые также сохраняют постоянное значение при движении системы. Такое интегральное выражение называется *интегральным инвариантом*, а число r — его порядком. В том случае, когда область интегрирования V_r является замкнутой, интегральный инвариант называется *относительным*, а если эта область не замкнута, то *абсолютным*.

Интегральные инварианты так же, как и обычные интегралы движения, дают возможность продвинуться в исследовании движения рассматриваемой системы. Кроме того, наличие того или иного интегрального инварианта часто предопределяется самой возможностью записать уравнения движения в канонической форме.

Прежде чем обратиться к выводу конкретных видов интегральных инвариантов, введем понятие *полной вариации* Δ *). В применении к функции $q(t)$ операция Δ означает варьирование не только самой функции $q(t)$, но и времени t, от которого она зависит. Предполагая, что $q = q[\alpha, t(\alpha)]$, имеем

$$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha}\Delta\alpha.$$

По своему смыслу $\frac{\partial q}{\partial \alpha}\Delta\alpha = \delta q$, а $\frac{\partial t}{\partial \alpha}\Delta\alpha = \Delta t$; поэтому

$$\Delta q = \delta q + \dot{q}\,\Delta t. \tag{4.107}$$

Соотношение (4.107), которое связывает полную вариацию Δ с изохронной вариацией δ, может быть применено к любой функции, чем мы и воспользуемся ниже.

Сначала получим *интегральный инвариант Картана — Пуанкаре*, который является инвариантом первого порядка. Пусть положение системы материальных точек с потенциальными силами определяют n обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Рассмотрим в расширенном фазовом пространстве Φ_{2n+1} этой системы функционал

$$S = \int\limits_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} L(q, \dot{q}, t)\,dt, \tag{4.108}$$

который называется *действием по Гамильтону*, а интегрирование производится вдоль некоторой траектории на интервале $[t_1, t_2]$. Вычислим полную вариацию S. Согласно (4.107) и (4.108)

$$\Delta S = \delta S + \dot{S}\,\Delta t = \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta L\,dt + [L\,\Delta t]\Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k\right) dt + [L\,\Delta t]_{t_1}^{t_2}$$

Воспользуемся тем, что $\delta\dot{q}_k = \frac{d}{dt}\delta q_k$, и вычислим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,d\,\delta q_k = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]\Bigg|_{t_1}^{t2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\,dt =$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Delta q_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\,\Delta t\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\,dt.$$

*) Более подробное изложение этого вопроса содержится в гл. 5.

Принимая во внимание также и то, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k, \quad L - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = -H(q, p, t),$$

запишем ΔS в виде

$$\Delta S = \left[\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta q_k - H \Delta t \right] \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \, dt. \quad (4.109)$$

Если варьировать действие по Гамильтону S так, чтобы от момента времени $t_1(\alpha)$ до момента времени $t_2(\alpha)$ изображающая точка в расширенном фазовом пространстве Φ_{2n+1} пробегала вдоль траектории действительного движения, то все выражения в круглых скобках под интегралом (4.109) обратятся в нуль, и мы получим

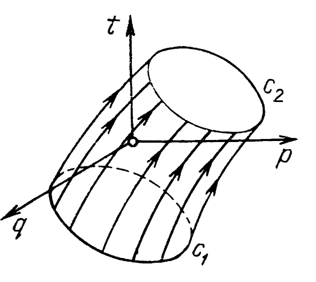


Рис. 4.9

$$\Delta S = \left[\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta q_k - H \Delta t \right] \Bigg|_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)}, \quad (4.110)$$

где α — параметр полной (неизохронной) вариации. Пусть теперь параметр α изменяется в интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant l$ так, чтобы функции $q_k = q_k[\alpha, t(\alpha)]$, $p_k = p_k[\alpha, t(\alpha)]$ и $t = t(\alpha)$ обладали свойством

$$q_k[0, t(0)] = q_k[l, t(l)], \quad p_k[0, t(0)] = p_k[l, t(l)],$$
$$t(0) = t(l),$$

т. е. чтобы концы траекторий в расширенном фазовом пространстве Φ_{2n+1} располагались на замкнутых кривых c_2 и c_1 (рис. 4.9). Тогда интегрирование по замкнутым кривым выражения (4.110) дает

$$\oint \Delta S = \oint_{c_2} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta q_k - H \Delta t \right) - \oint_{c_1} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta q_k - H \Delta t \right).$$

Поскольку действие $S(q, p, t)$ является однозначной функцией параметра α, интеграл $\oint \Delta S = 0$ и, следовательно,

$$\oint_{c_1} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta q_k - H \Delta t \right) = \oint_{c_2} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta q_k - H \Delta t \right).$$

Полученное равенство означает, что интеграл

$$I_1 = \oint \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta q_k - H \Delta t \right), \quad (4.111)$$

взятый по замкнутому контуру c, охватывающему одну и ту же трубку действительных траекторий, сохраняется постоянным. Выражение (4.111) называется *интегральным инвариантом Картана — Пуанкаре.*

В частном случае, когда замкнутые кривые c_1 и c_2 лежат в плоскостях $t_1 = \text{const}$ и $t_2 = \text{const}$ (рис. 4.10) и время t, по существу, не варьируется ($\Delta t = 0$), полная вариация Δ превращается в изохронную вариацию δ, а выражение (4.111) принимает вид

$$I_1 = \oint\limits_c \sum_{k=1}^{n} p_k\, \delta q_k. \qquad (4.112)$$

Интегральный инвариант (4.112) не зависит от функции Гамильтона H и получил название *универсального интегрального инварианта Пуанкаре.* Если ввести два вектора: $\mathbf{p}\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и $\delta\mathbf{q}(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n)$, то выражение (4.112) можно рассматривать как циркуляцию вектора $\mathbf{p}$ по замкнутому контуру c, лежащему в гиперплоскости $t = \text{const}$ расширенного фазового пространства Φ_{2n+1}. Тогда физический смысл интегрального инварианта (4.112) заключается в сохранении циркуляции вектора $\mathbf{p}$ по замкнутому контуру c. Вывод выражения (4.112) по существу доказывает, что *если уравнения движения некоторой системы материальных точек можно записать в канонической форме, то эта система обладает универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре.*

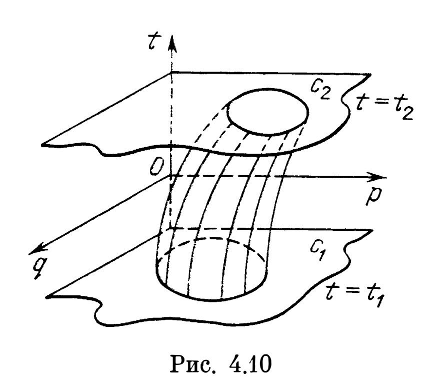


Рис. 4.10

Докажем обратную теорему: *если система материальных точек обладает универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре, то дифференциальные уравнения ее движения*

$$\dot q_k = \varphi_k(q, p, t), \quad \dot p_k = \psi_k(q, p, t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4.113)$$

записываются в канонической форме.

В самом деле, поскольку по условию обратной теоремы выражение (4.112) при движении системы материальных точек сохраняется постоянным, полная производная по времени от этого выражения в силу уравнений (4.113) должна обращаться в нуль, т. е.

$$\frac{d}{dt} \oint\limits_c \sum_{k=1}^{n} p_k\, \delta q_k = 0.$$

Поскольку замкнутый контур c остается неизменным, оператор d/dt можно внести под знак интеграла

$$\oint_c \sum_{k=1}^{n} \left(\dot{p}_k\,\delta q_k + p_k \frac{d}{dt}\,\delta q_k\right) = 0. \tag{4.114}$$

Используя перестановочность операций d и δ, имеем

$$\oint_c \sum_{k=1}^{n} p_k\,\frac{d}{dt}\delta q_k = \oint_c \sum_{k=1}^{n} p_k\,\delta \dot{q}_k = \oint_c \delta \sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}_k - \oint \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k\delta p_k.$$

Подставляя полученное выражение в (4.114) и принимая во внимание, что интеграл по замкнутому контуру от дифференциала однозначной функции равен нулю, т. е.

$$\oint_c \delta \sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}_k = 0,$$

получаем

$$\oint \sum_{k=1}^{n} (\dot{p}_k\delta q_k - \dot{q}_k\,\delta p_k) = 0.$$

Отсюда следует, что подынтегральная функция в полученном равенстве должна быть полным дифференциалом (роль которого в этом выражении играет оператор δ) некоторой функции $-H(q,\ p,\ t)$, в которой $q_k = q_k(\alpha)$, $p_k = p_k(\alpha)$, $t = \mathrm{const}$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} (\dot{p}_k\delta q_k - \dot{q}_k\delta p_k) = -\,\delta H = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях δq_k и δp_k, получаем канонические уравнения, что и требовалось.

Рассмотренные интегральные инварианты Пуанкаре и Картана — Пуанкаре являются линейными или интегральными инвариантами первого порядка.

Покажем теперь, что у консервативной системы, уравнения движения которой записываются в канонической форме, сохраняется *фазовый объем*, т. е. существует интегральный инвариант высшего порядка

$$I_{2n} = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{2n} \delta q_1\,\delta q_2 \ldots \delta q_n\,\delta p_1\,\delta p_2 \ldots \delta p_n$$

(*теорема Лиувилля*). Доказательство этой теоремы состоит в непосредственном вычислении производной $\frac{d}{dt} I_{2n}$, в результате чего оказывается, что она равна нулю. В самом деле, по определению производной по времени

$$\frac{d}{dt}\,I_{2n} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{I_{2n}(t+\Delta t) - I_{2n}(t)}{\Delta t}.$$

Но фазовый объем (рис. 4.11) в момент времени $t+\Delta t$ равен

$$I_{2n}(t+\Delta t)=\int\limits_{V'_{2n}}\prod_{k=1}^{n}\delta q'_k\,\delta p'_k=\int\limits_{V_{2n}}\frac{\partial(q',p')}{\partial(q,p)}\prod_{k=1}^{n}\delta q_k\,\delta p_k.$$

Здесь $q'_k=q_k+\dot q_k\Delta t$, $p'_k=p_k+\dot p_k\Delta t$, переменные q_k и p_k изменяются согласно каноническим уравнениям

$$\dot q_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \dot p_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

а якобиан преобразования $\frac{\partial(q',p')}{\partial(q,p)}$ от переменных q_k, p_k к переменным q'_k, p'_k $(k=1,2,\ldots,n)$ равен

$$\frac{\partial(q',p')}{\partial(q,p)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial q'_1}{\partial q_1}, & \frac{\partial q'_2}{\partial q_1}, & \ldots, & \frac{\partial q'_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial p'_1}{\partial q_1}, & \frac{\partial p'_2}{\partial q_1}, & \ldots, & \frac{\partial p'_n}{\partial q_1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial q'_1}{\partial p_n}, & \frac{\partial q'_2}{\partial p_n}, & \ldots, & \frac{\partial q'_n}{\partial p_n}, & \frac{\partial p'_1}{\partial p_n}, & \frac{\partial p'_2}{\partial p_n}, & \ldots, & \frac{\partial p'_n}{\partial p_n}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1+\frac{\partial \dot q_1}{\partial q_1}\Delta t, & \frac{\partial \dot q_2}{\partial q_1}\Delta t, & \ldots, & \frac{\partial \dot q_n}{\partial q_1}\Delta t, & \frac{\partial \dot p_1}{\partial q_1}\Delta t, & \frac{\partial \dot p_2}{\partial q_1}\Delta t, & \ldots, & \frac{\partial \dot p_n}{\partial q_1}\Delta t\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial \dot q_1}{\partial p_n}\Delta t, & \frac{\partial \dot q_2}{\partial p_n}\Delta t, & \ldots, & \frac{\partial \dot q_n}{\partial p_n}\Delta t, & \frac{\partial \dot p_1}{\partial p_n}\Delta t, & \frac{\partial \dot p_2}{\partial p_n}\Delta t, & \ldots, & 1+\frac{\partial \dot p_n}{\partial p_n}\Delta t\end{vmatrix}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[1+\left(\frac{\partial \dot q_k}{\partial q_k}+\frac{\partial \dot p_k}{\partial p_k}\right)\Delta t+\ldots\right]=\prod_{k=1}^{n}\left[1+\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial p_k}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial q_k}\right)\Delta t+\ldots\right]$$

т. е. он равен единице с точностью до малых членов по Δt до второго порядка. Следовательно, $\frac{d}{dt}I_{2n}=0$, и теорема Лиувилля доказана.

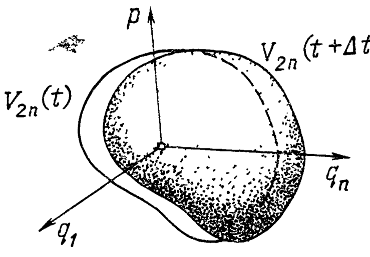


Рис. 4.11

Пусть механическая система, движение которой описывается каноническими уравнениями, зависит от некоторого физического параметра λ, медленно (как говорят, «адиабатически») изменяющегося со временем. Предположим, что эта система совершает движение, при котором изображающая точка остается в конечной области фазового пространства. Если T — период движения рассматриваемой системы при $\lambda=\text{const}$, то условием медлен-

ности изменения параметра λ является выполнение неравенства

$$T\, d\lambda/dt \ll \lambda. \qquad (4.115)$$

Пусть условие (4.115) выполняется, тогда интегральный инвариант, имеющий место в этом случае и представляющий сохранение фазового объема, называется *адиабатическим инвариантом* рассматриваемой системы [25].

Пример 4.19. Рассмотрим малые колебания системы примера 4.18 в случае $\mu = 0$, т. е. когда пружина является линейной, но жесткость c пружины медленно изменяется со временем. Как при этом изменится амплитуда колебаний линейного осциллятора?

Как известно, уравнения движения осциллятора записываются в канонической форме с функцией Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mk^2}{2} q^2,$$

где $k^2 = c/m$, а $c = c(t)$ — медленно изменяющаяся функция времени, так что при нескольких колебаниях осциллятора этим изменением можно пренебречь. Интеграл энергии

$$\frac{mk^2}{2} q^2 + \frac{p^2}{2m} = h \qquad (4.116)$$

теперь уже не имеет места, однако уравнение (4.116) указывает на то, что изображающая точка в фазовом пространстве $\Phi_2(q, p)$ будет двигаться по эллипсу (рис. 4.12) с полуосями $a = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2h}{m}}$, $b = \sqrt{2mh}$, которые медленно изменяются.

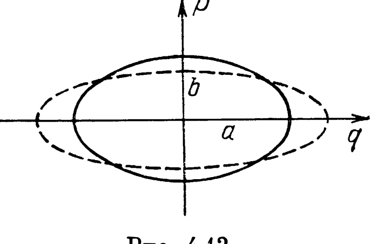


Рис. 4.12

Воспользуемся тем, что здесь имеет место адиабатический инвариант I_2, т. е. сохраняется площадь эллипса (4.116), хотя длины полуосей a, b с течением времени будут медленно изменяться. В нашем случае

$$I_2 = \pi ab = \frac{2\pi h}{k} = B = \text{const}.$$

Отсюда и из предыдущих формул следует, что

$$a = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(mc)^{1/4}}, \qquad b = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{1/2} (mc)^{1/4},$$

т. е. если со временем жесткость $c(t)$ пружины уменьшается, то эллипс на рис. 4.12 «сплющивается» и принимает вид, указанный на рис. 4.12 пунктиром. Это означает, что со временем амплитуда колебаний такого осциллятора увеличивается. При этом, как следует из формулы $k^2 = c/m$, частота колебаний уменьшается.

Глава 5

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 5.1. Действие по Гамильтону

Предположим, что рассматриваемая консервативная материальная система подчинена голономным идеальным связям. Пусть действительное движение системы описывается обобщенными координатами

$$q_1(t),\ q_2(t),\ \ldots,\ q_n(t). \tag{5.1}$$

Для наглядности введем в рассмотрение понятие «изображающей» точки. Пусть система имеет две степени свободы, а $q_1(t)$ и $q_2(t)$ суть обобщенные координаты, описывающие ее движение. Очевидно, что каждому положению системы, определяемому координатами q_1 и q_2 на плоскости q_1q_2, будет соответствовать точка с координатами q_1, q_2. При изменении q_1 и q_2 точка на плоскости q_1q_2 будет менять свое положение. Эту точку называют *изображающей* точкой. При рассмотрении системы с n степенями свободы под *изображающей* точкой будем понимать точку в n-мерном пространстве с координатами q_1, q_2, ..., q_n.

Под *прямым путем* изображающей точки понимается геометрическое место ее действительных положений в n-мерном пространстве. *Окольным путем* называется геометрическое место воображаемых смещенных положений прямого пути, причем смещения в начальный и конечный моменты должны равняться нулю. В соответствии с условиями (5.1) прямой путь параметрически изображается уравнениями

$$q_i = q_i(t) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Окольные пути параметрически изображаются уравнениями

$$q_i^*(t) = q_i(t) + \delta q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где вариации обобщенных координат δq_i вследствие независимости обобщенных координат q_i представляют собой любые бесконечно малые дифференцируемые функции, не нарушающие связей и подчиненные условиям:

$$(\delta q_i)_{t=t_1} = 0, \quad (\delta q_i)_{t=t_2} = 0, \tag{5.2}$$

где t_1 и t_2 — фиксированные, но произвольно выбираемые моменты времени. Условия (5.2) называются условиями закрепленно-

сти концов окольных путей. Из выражений

$$q_i^*(t) = q_i(t) + \delta q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

следует, что

$$\delta q_i = q_i^*(t) - q_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. вариации обобщенных координат представляют собой изменения обобщенных координат при фиксированном времени t. Такие вариации называются «изохронными».

Действием по Гамильтону за промежуток времени (t_1, t_2) называется величина S, определяемая выражением

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{5.3}$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа. Таким образом, действие по Гамильтону представляет собой функционал. Значение S определяется выбором n функций времени $q_1, q_2, \ldots, q_n$, так как L является функцией $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t$. На любом пути, когда $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ соответствуют некоторому движению, действие S имеет определенное числовое значение.

§ 5.2. Принцип стационарного действия Гамильтона — Остроградского *)

Принцип Гамильтона — Остроградского утверждает, что *вариация действия по Гамильтону*

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

(конечного «импульса лагранжевой функции») *на прямом пути равна нулю, т. е.*

$$\delta S = 0. \tag{5.4}$$

Это означает, что действие S принимает стационарное значение на прямом пути **).

*) Этот принцип сформулирован Гамильтоном в 1835 г. для стационарных связей. Независимо от него для общего случая нестационарных связей этот принцип был сформулирован и обоснован М. В. Остроградским в 1848 г.

**) Говорят, что функционал вида

$$\int_{x_1}^{x_2} f\left[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x), x\right] dx$$

имеет *стационарное значение* при функциях $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, если вариация этого функционала, обусловленная заданием вариаций δy_i с точностью до величин первого порядка малости относительно δy_i, равна нулю.

Покажем, как, исходя из принципа Гамильтона — Остроградского, получить уравнения Лагранжа второго рода. Пусть $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$ — обобщенные координаты, соответствующие прямому пути консервативной голономной механической системы. Рассмотрим окольный путь, определяемый функциями $q_1+\delta q_1$, $q_2+\delta q_2$, ..., $q_n+\delta q_n$. Тогда с точностью до членов первого порядка малости относительно величин δq_i и $\delta\dot q_i$

$$\delta L = L(q_i+\delta q_i,\ \dot q_i+\delta\dot q_i,\ t) - L(q_i,\ \dot q_i, t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i. \quad (5.5)$$

Следовательно,

$$S+\delta S = \int_{t_1}^{t_2}(L+\delta L)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}L\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt,$$

где

$$S = \int_{t_1}^{t_2}L(q_i, \dot q_i, t)\,dt.$$

Отсюда следует

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i\right)\right]dt.$$

Используем свойство операторов $\delta\frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q_i$ (см. с. 101). Тогда

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)\right)\right]dt,$$

или

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right]dt + \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)dt.$$

В силу условия закрепленности концов (5.2) второй интеграл в последнем выражении равен нулю. В самом деле,

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)dt = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Таким образом,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i \, dt.$$

Согласно принципу Гамильтона — Остроградского $\delta S = 0$. Значит,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i \, dt = 0.$$

Вследствие произвольности интервала интегрирования

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i = 0.$$

Так как вариации координат независимы, то получаем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{5.6}$$

Покажем теперь, как, исходя из уравнений Лагранжа второго рода, можно прийти к принципу Гамильтона — Остроградского. Умножая каждое из уравнений (5.6) на соответствующую вариацию и складывая между собой полученные выражения, найдем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \delta q_i = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i\right) = 0. \tag{5.7}$$

Так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

то выражение (5.7) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i\right) = 0.$$

В соответствии с соотношением (5.5)

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i\right).$$

Следовательно,

$$\delta L - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = 0.$$

Умножая это выражение на dt и интегрируя в пределах от t_1 до t_2 (t_1, t_2 — фиксированные, но произвольные моменты времени), будем иметь

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\,dt - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0,$$

так как $(\delta q_i)_{t=t_1} = 0$, $(\delta q_i)_{t=t_2} = 0$, а время не варьируется. Таким образом,

$$\delta S = 0.$$

Итак, показано, что из принципа Гамильтона — Остроградского можно получить уравнения движения, а из уравнений движения — принцип Гамильтона — Остроградского. Из этого следует, что этот принцип может быть положен в основу механики голономных консервативных систем *).

Из принципа Гамильтона — Остроградского можно получить и канонические уравнения Гамильтона. Действительно, из выражения для функции Гамильтона

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L$$

определяем

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H,$$

где $H = H(q_i, p_i)$. Из условия (5.4) следует

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H\right) = 0. \tag{5.8}$$

Так как

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i$$

и, кроме того,

$$\delta\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\delta p_i + \sum_{i=1}^{n} p_i\delta\dot{q}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\delta p_i + \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{d}{dt}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\delta p_i + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - \sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\delta q_i,$$

*) Распространение принципа Гамильтона — Остроградского на неголономные системы рассмотрено, например, в монографиях [30, 37].

то соотношение (5.8) примет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] = 0, \qquad (5.9)$$

ибо

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

в силу закрепленности концов окольных путей. Несмотря на то, что q_i и p_i входят в функцию H как независимые переменные, при вычислении интеграла (5.9) нельзя считать δq_i и δp_i независимыми, так как они связаны зависимостью, вытекающей из соотношений

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Но равенства $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ следуют из определения функции Гамильтона (см. § 4.4); поэтому в силу независимости вариаций δq_i обращаются в нуль и все множители при δq_i. Итак, получаем

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Принцип Гамильтона — Остроградского дает только условие стационарности действия по Гамильтону на прямом пути. Для решения вопросов о характере экстремума следует определить знак второй вариации $\delta^2 S$. Значение действия по Гамильтону на прямом пути по сравнению с окольными будет минимальным, если $\delta^2 S > 0$. Если промежуток времени $t_2 - t_1$ выбрать достаточно малым, то условие $\delta^2 S > 0$ будет выполнено и действие по Гамильтону на прямом пути будет минимальным по сравнению с окольными путями *) [6, 45].

Докажем теперь, что обратимое преобразование (4.27) будет каноническим, если выражение (4.40)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} p'_i \dot{q}'_i - H' + \frac{dV}{dt}$$

будет тождественно удовлетворяться. Перепишем выражение (5.8) в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt \right) = 0.$$

*) Определение характера экстремума пояснено в примере 5.1.

Из этого выражения, как только что было показано, получаются уравнения Гамильтона для переменных q_i и p_i. Для того чтобы обратимое преобразование (4.27) было каноническим, т. е. чтобы новые переменные q_i', p_i' удовлетворяли уравнениям Гамильтона, должно выполняться условие

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i' \, dq_i' - H' \, dt \right) = 0.$$

Оба последних равенства должны удовлетворяться одновременно. Следовательно, их подынтегральные выражения могут отличаться друг от друга не более чем на дифференциал от какой-либо функции V, так как

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dV = \delta \left[V(t_2) - V(t_1) \right] = 0,$$

и на множитель c, который называется валентностью преобразования при переходе от канонических переменных q_i, p_i к переменным q_i', p_i'. Поэтому подынтегральные выражения для действия по Гамильтону могут отличаться лишь при условии, что выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt = c \left(\sum_{i=1}^{n} p_i' \, dq_i' - H' \, dt \right) + dV.$$

Ради простоты в § 4.4 были рассмотрены лишь такие унивалентные канонические преобразования, для которых $c = 1$. В дальнейшем мы также остановимся лишь на случае, когда $c = 1$. Следовательно, должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt = \sum_{i=1}^{n} p_i' \, dq_i' - H' \, dt + dV.$$

Рассмотрим теперь неконсервативную голономную систему. Уравнения Лагранжа второго рода для такой системы имеют вид (см. (3.21))

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Умножая каждое из этих уравнений на соответствующую вариацию обобщенной координаты δq_i и складывая между собой полученные соотношения, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i - Q_i \delta q_i \right] = 0. \qquad (5.10)$$

Проведя вычисление

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i$$

и принимая во внимание, что

$$\delta T = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i,$$

перепишем соотношение (5.10) в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \delta T - \sum_{i=1}^{n} Q_i\delta q_i = 0.$$

Умножая это выражение на dt и интегрируя в пределах от t_1 до t_2, получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T + \sum_{i=1}^{n} Q_i\delta q_i\right)dt = 0, \qquad (5.11)$$

так как в силу закрепленности концов окольных путей

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = 0.$$

Результат (5.11) также называют принципом Гамильтона — Остроградского, однако следует иметь в виду, что это уже не вариационная формулировка, а лишь утверждение, что при движении изображающей точки вдоль траектории действительного перемещения этот интеграл равен нулю. В самом деле, выделяя в обобщенных силах консервативные силы

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где Π — потенциальная энергия, а Q_i' — обобщенная сила, происходящая от неконсервативных сил, и вспоминая, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \equiv 0,$$

можно выражение (5.11) переписать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T - \delta \Pi + \sum_{i=1}^{n} Q_i'\delta q_i\right)dt = 0,$$

где

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\delta q_i.$$

Но так как $L = T - \Pi$ и время не варьируется, то

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} Q'_i\,\delta q_i\,dt = 0.$$

Вводя теперь величину $\delta S'$, можно записать

$$\delta S' = \delta S + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} Q'_i\,\delta q_i\,dt = 0. \qquad (5.12)$$

Результат (5.12) утверждает только то, что величина $\delta S'$ на прямом пути равна нулю. Самого же функционала S' не существует.

Пример 5.1. Рассмотрим движение по инерции материальной точки по гладкой поверхности.

Принимая $\Pi = 0$, имеем $L = mv^2/2 = \text{const}$. Действие по Гамильтону имеет вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{mv^2}{2}\,dt = \frac{mv^2}{2}(t_2 - t_1).$$

Согласно принципу Гамильтона при движении точки по прямому пути между начальным и конечным положениями точки действие по Гамильтону имеет стационарное значение по сравнению с окольными путями при условии, что сравниваемые движения происходят за один и тот же промежуток времени $t_2 - t_1$. Следовательно, для действительного движения

$$\delta S = (t_2 - t_1)\,\delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0$$

и

$$\delta(v^2) = 0.$$

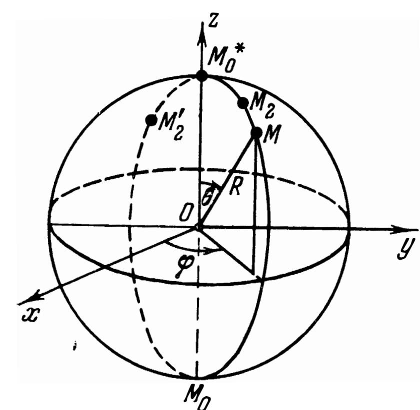


Рис. 5.1

Для выяснения характера экстремума рассмотрим частный случай — движение точки по гладкой сфере радиуса R (рис. 5.1). Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$, найдем

$$L = T = \frac{R^2}{2} m\,(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta).$$

Для прямого пути выполняются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 0.$$

Отсюда $\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta \cdot \dot\varphi^2 = 0$, $\sin^2\theta \cdot \dot\varphi = c$ (c — постоянная).

Пусть в начальный момент $\dot\theta = \dot\theta_0$, $\dot\varphi = 0$. Тогда $\varphi = \text{const}$ и $\dot\theta = \dot\theta_0$, т. е. движение будет происходить по меридиану (например, по меридиану $M_0M_0^*$) (рис. 5.1). Скорость материальной точки равна $v^2 = R^2\dot\theta_0^2$. Из этого следует, что движение по прямому пути представляет собой равномерное движение по дуге большого круга.

Если расстояние между начальной точкой M_0 и конечной точкой M_2 (рис. 5.1) будет меньше πR, то любой окольный путь между этими точками будет больше, чем дуга большого круга M_0M_2. А так как движение по окольному пути происходит за тот же промежуток времени, что и по прямому, то скорость движения по прямому пути будет минимальной. Если же дуга M_0M_2 будет больше πR, то наименьшее значение действия по Гамильтону будет достигаться по дополнительной кратчайшей дуге M_0M_2'.

Таким образом, скорость точки M_2 будет минимальной до тех пор, пока она не достигнет точки M_0^*, диаметрально противоположной точке M_0. Точка M_0^* называется *сопряженным кинетическим фокусом* точки M_0 *).

§ 5.3. Полное (асинхронное) варьирование

При сравнении прямого пути и окольных мы сопоставляли функции $q_i(t)$ и $q_i^*(t) = q_i(t) + \delta q_i$ для одного и того же момента времени t. Геометрически это представлено на рис. 5.2. На этом рисунке изображены функции $q_i(t)$ и $q_i^*(t)$. Точки M_1 и M_2, лежащие на одной вертикали, сопоставляются друг с другом в один и тот же момент времени.

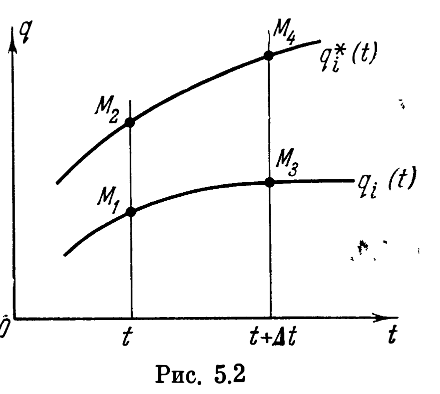


Рис. 5.2

Рассмотрим теперь момент времени $t + \Delta t$. Точка M_3 получается из точки M_1 благодаря действительному движению в промежутке времени от t до $t + \Delta t$. Соответствующее этой точке значение функции $q_i(t + \Delta t)$ сопоставляется со значением функции в точке M_4 $q_i^*(t + \Delta t) = q_i(t + \Delta t) + \delta q_i(t + \Delta t)$. Сопоставление опять-таки происходит для одного момента времени $t + \Delta t$. Отметим, что с точностью до малых первого порядка малости

$$q_i^*(t + \Delta t) = q_i(t + \Delta t) + \delta q_i(t + \Delta t) = q_i(t) + \dot q_i\Delta t + \delta q_i. \quad (5.13)$$

Приведем теперь в соответствие точки кривых $q_i(t)$ и $q_i^*(t)$ не в момент времени t, а в моменты t и $t + \Delta t$, т. е. приведем

---

*) Можно доказать, что в общем случае действие по прямому пути имеет наименьшее значение по сравнению с окольными путями, если на прямом пути нет сопряженного для начальной точки кинетического фокуса.

в соответствие точки M_1 и M_4. В этом случае варьируется не только координата, но и время. Эту операцию называют *полной*, или *асинхронной*, *вариацией* и обозначают символом Δ. Для точки M_4 теперь можно написать

$$q_i^*(t+\Delta t) = q_i^*(t) + \Delta q_i. \tag{5.14}$$

Сравнивая между собой выражения (5.13) и (5.14), имеем

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot q_i \Delta t, \tag{5.15}$$

где Δt — бесконечно малая дифференцируемая по времени функция. Операция (5.15) может быть применена к любой функции времени. Например,

$$\Delta \dot q_i = \delta \dot q_i + \ddot q_i \Delta t. \tag{5.16}$$

Продифференцируем выражение (5.15) по времени:

$$\frac{d}{dt}(\Delta q_i) = \frac{d}{dt}(\delta q_i) + \ddot q_i \Delta t + \dot q_i \frac{d}{dt}(\Delta t) = \delta \dot q_i + \ddot q_i \Delta t + \dot q_i \frac{d}{dt}(\Delta t).$$

Приняв во внимание соотношение (5.16), получим

$$\frac{d}{dt}(\Delta q_i) = \Delta \dot q_i + \dot q_i \frac{d}{dt}(\Delta t).$$

Отсюда следует, что перестановка операций Δ и дифференцирования по времени d/dt не имеет места. Для операции же δ, как было ранее выяснено, аналогичная перестановка существует:

$$\delta \dot q_i = \frac{d}{dt}\delta q_i.$$

§ 5.4. Принцип стационарного (наименьшего) действия Лагранжа

Рассмотрим консервативную голономную систему, подчиненную стационарным связям. В такой системе справедлив закон сохранения энергии

$$T + \Pi = h. \tag{5.17}$$

Пусть $q_i(t_1)$ и $q_i(t_2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — фиксированные точки на прямом пути. Рассмотрим только такие окольные пути, на которых выполняется условие (5.17) и которые соединяются в фиксированных точках $q_i(t_1)$ и $q_i(t_2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на прямом пути. Условие (5.17) не дает возможности сопоставлять точки прямого пути с точками окольных путей в один и тот же момент времени, так как накладывает определенные ограничения на скорости точек на окольных путях (скорости должны быть такими, чтобы все время удовлетворялось соотношение (5.17)). Например, промежуток времени движения системы из фиксированного положения $q_i(t_1)$ до фиксированного положения $q_i(t_2)$

($i=1, 2, \ldots, n$) по окольному пути может быть не равен промежутку времени t_2-t_1 движения системы по прямому пути *). Таким образом, при условии (5.17) следует применять операцию полного варьирования. Отметим, что в силу закрепленности концов окольных путей

$$\Delta q_i(t_1)=0, \quad \Delta q_i(t_2)=0. \tag{5.18}$$

Для рассматриваемой механической системы справедливы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{5.19}$$

где $L=T-\Pi$. Так как

$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

(здесь использовано условие $\delta\dot{q}_i=d\delta q_i/dt$), то в силу уравнений (5.19)

$$\delta L=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i,$$

где $p_i=\partial L/\partial\dot{q}_i$ (см. § 4.1). Но $\delta L=\delta T-\delta\Pi$ и, кроме того, в соответствии с условием (5.17) $\delta T+\delta\Pi=0$. Значит,

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}p_i\,\delta q_i=2\,\delta T. \tag{5.20}$$

Согласно формуле (5.15) $\delta q_i=\Delta q_i-\dot{q}_i\Delta t$. Подставляя это выражение в соотношение (5.20), получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}p_i\,\Delta q_i-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i\,\Delta t=2\,\delta T. \tag{5.21}$$

Но

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i,$$

*) Так, при прямолинейном движении точки в случае отсутствия сил $mv^2/2=h$. Отсюда $v=dx/dt=\sqrt{2h/m}$, $x_2=\sqrt{2h/m}(t_2-t_1)+x_1$. Значит, по любому окольному пути при одном и том же h нельзя за промежуток t_2-t_1 пройти тот же путь x_2-x_1.

так как $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$. Рассматриваемая механическая система подчинена стационарным связям, поэтому (§ 3.1, формула (3.10))

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T. \tag{5.22}$$

Учитывая выражение (5.22), перепишем соотношение (5.21) в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta q_i - \frac{d}{dt}(2T\,\Delta t) = 2\,\delta T,$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta q_i = 2(\delta T + \dot{T}\,\Delta t) + 2T \frac{d}{dt}\,\Delta t.$$

На основании формулы (5.15)

$$\Delta T = \delta T + \dot{T}\,\Delta t$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta q_i = \Delta(2T) + 2T \frac{d}{dt}\,\Delta t.$$

Умножая это выражение на dt, интегрируя в пределах от t_1 до t_2 и используя условия (5.18), получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\Delta(2T) + 2T \frac{d}{dt}(\Delta t)\right] dt = 0. \tag{5.23}$$

Докажем, что

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\Delta(2T) + 2T \frac{d}{dt}(\Delta t)\right] dt. \tag{5.24}$$

Так как

$$\Delta(2T) = \delta(2T) + \frac{d}{dt}(2T)\,\Delta t = \delta(2T) + \frac{d}{dt}(2T\,\Delta t) - 2T \frac{d}{dt}(\Delta t),$$

то

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\Delta(2T) + 2T \frac{d}{dt}(\Delta t)\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(2T)\,dt + 2T\,\Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{5.25}$$

Применим теперь операцию Δ к интегралу $\int\limits_{t_1}^{t_2} 2T\,dt$:

$$\Delta \int\limits_0^t 2T\,dt = \delta \int\limits_0^t 2T\,dt + 2T\,\Delta t = \int\limits_0^t \delta(2T)\,dt + 2T\,\Delta t.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta \int\limits_0^{t_2} 2T\,dt = \int\limits_0^{t_2} \delta(2T)\,dt + (2T\,\Delta t)_{t=t_2}, \tag{5.26}$$

$$\Delta \int\limits_0^{t_1} 2T\,dt = \int\limits_0^{t_1} \delta(2T)\,dt + (2T\,\Delta t)_{t=t_1}. \tag{5.27}$$

Вычитая из выражения (5.26) выражение (5.27), получим

$$\Delta \int\limits_{t_1}^{t_2} 2T\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta(2T)\,dt + 2T\,\Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{5.28}$$

Из равенства правых частей формул (5.25) и (5.28) следует равенство левых, т. е. справедливость соотношения (5.24). Таким образом, из (5.23) и (5.24) следует

$$\Delta \int\limits_{t_1}^{t_2} 2T\,dt = 0. \tag{5.29}$$

Величина

$$A = \int\limits_{t_1}^{t_2} 2T\,dt \tag{5.30}$$

называется *действием по Лагранжу*. Формула (5.29) выражает *принцип стационарного действия Лагранжа**): *действие по Лагранжу между двумя фиксированными положениями системы имеет стационарное значение на прямом пути, если на окольных путях сохраняется одно и то же постоянное значение полной механической энергии.*

Если взять только одну материальную точку, то согласно формуле (5.30)

$$A = \int\limits_{t_1}^{t_2} mv^2\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} mv\frac{ds}{dt}\,dt = \int\limits_{s_1}^{s_2} mv\,ds.$$

---

*) Этот принцип иногда называется *принципом Мопертюи*, который высказал его первым, но в весьма неясной форме. Своим установлением этот принцип обязан Эйлеру и особенно Лагранжу.

Отметим, что условие (5.29) является условием стационарности величины A. Вопрос о том, будет ли при этом A иметь минимальное значение, требует дальнейшего исследования. Можно доказать, что для достаточно близких t_1 и t_2 действие по Лагранжу A будет минимумом. В этом случае этот принцип можно назвать *принципом наименьшего действия.*

Формула (5.29) была получена на базе уравнений Лагранжа второго рода. Но можно сделать и наоборот — принять эту формулу за исходное положение механики консервативных голономных систем со стационарными связями и получить из нее уравнения движения материальной системы [30].

Рассмотрим в качестве примера движение точки по гладкой поверхности в случае, если $\Pi = 0$. Действие по Лагранжу равно

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt = \int_{t_1}^{t_2} mv^2\,dt = mv^2(t_2 - t_1).$$

Для действительного движения

$$\Delta A = 0,$$

т. е.

$$mv^2 \Delta t = 0.$$

Так как $mv^2/2 = h$, то v является постоянной величиной и, следовательно, $\Delta t = 0$.

По всем остальным путям движение точки происходит с постоянной скоростью, так как $h = \text{const}$. Значит, при движении по прямому пути время движения будет минимальным.

§ 5.5. Принцип стационарного (наименьшего) действия Лагранжа в форме Якоби

Исключим теперь из выражения принципа стационарного действия (5.29) время t, используя интеграл энергии

$$T + \Pi = h. \tag{5.31}$$

Поскольку кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

а $v_\nu = ds_\nu/dt$, то можно записать, используя (5.31), что

$$2T(dt)^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (ds_\nu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,dq_i\,dq_j = 2(h - \Pi)(dt)^2.$$

Отсюда

$$dt = \sqrt{\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu (ds_\nu)^2}{2(h-\Pi)}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}\,dq_i\,dq_j}{2(h-\Pi)}}. \tag{5.32}$$

Подставляя это значение dt в формулу (5.30), будет иметь

$$A=\int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt=\int_{(1)}^{(2)}\sqrt{2\,(h-\Pi)\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\,(ds_\nu)^2},$$

или

$$A=\int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt=\int_{(1)}^{(2)}\sqrt{2\,(h-\Pi)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,dq_i\,dq_j}. \qquad (5.33)$$

Формула (5.33) представляет собой выражение для действия по Лагранжу. Пределы интегрирования соответствуют начальному и конечному положению системы.

Следуя Якоби, примем обобщенную координату q_1 за независимую переменную, тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,dq_i\,dq_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{dq_i}{dq_1}\frac{dq_j}{dq_1}(dq_1)^2=$$
$$=\left[A_{11}+\sum_{i=2}^{n}A_{i1}\frac{dq_i}{dq_1}+\sum_{j=2}^{n}A_{1j}\frac{dq_j}{dq_1}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}A_{ij}\frac{dq_i}{dq_1}\frac{dq_j}{dq_1}\right](dq_1)^2=$$
$$=\left[A_{11}+2\sum_{i=2}^{n}A_{i1}\frac{dq_i}{dq_1}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}A_{ij}\frac{dq_i}{dq_1}\frac{dq_j}{dq_1}\right](dq_1)^2.$$

Вводя обозначение

$$R=2\,(h-\Pi)\left(A_{11}+2\sum_{i=2}^{n}A_{i1}\frac{dq_i}{dq_1}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}A_{ij}\frac{dq_i}{dq_1}\frac{dq_j}{dq_1}\right), \qquad (5.34)$$

перепишем выражение (5.33) в виде

$$A=\int_{(q_1^1)}^{(q_1^2)}\sqrt{R}\,dq_1, \qquad (5.35)$$

где q_1^1 — значение координаты q_1 в начальном положении системы, q_1^2 — ее значение в конечном положении системы. Формула (5.35) представляет собой действие по Лагранжу в форме Якоби. Заметим, что поскольку функция $\sqrt{R}$ не зависит от времени t, то в принципе стационарного действия в форме Якоби рассматривается уже не закон движения изображающей точки по траектории, а сама фазовая траектория. Это следует из того, что равенство (5.35) имеет вид формулы (5.3), только вместо функции L стоит функция $\sqrt{R}$, а роль времени t играет координата q_1. Поэтому аналогично тому, как из формулы (5.3) получаются уравнения Лагранжа второго рода, так из формулы (5.35) по-

лучаются уравнения, определяющие траекторию изображающей точки, так как их решение дает зависимость обобщенных координат q_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ от обобщенной координаты q_1

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{5.36}$$

Используя формулы (5.32) и (5.34), получим время движения простой квадратурой:

$$t - t_0 = \int\limits_{(q_1^1)}^{(q_1^2)} \frac{\sqrt{R}}{2(h - \Pi)} dq_1. \tag{5.37}$$

Общее решение задачи будет содержать $2n$ произвольных постоянных, а именно t_0, h и $2n-2$ постоянных интегрирования, получаемых при решении уравнений (5.36) (число этих уравнений равно $n-1$).

Пример 5.2. Определим траекторию материальной точки в однородном поле силы тяжести.

Рассматривая движение только в вертикальной плоскости, найдем траекторию, проходящую через две фиксированные точки с координатами (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Направим ось y вертикально вверх, а ось x горизонтально. За обобщенные координаты примем $q_1 = x$, $q_2 = y$. Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + mgy = h.$$

Так как

$$2T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

то в соответствии с выражением (5.34)

$$R = 2(h - mgy)(m + my'^2)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{R} = \sqrt{2m(h - mgy)(1 + y'^2)}.$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial y'} = \frac{\sqrt{2m(h - mgy)}}{\sqrt{1 + y'^2}} y', \qquad \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial y} = -\frac{m^2 g(1 + y'^2)}{\sqrt{2m(h - mgy)(1 + y'^2)}}.$$

Используя уравнения (5.36), пайдем дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial y'} - \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial y} = 0.$$

Подставляя сюда производные от $\sqrt{R}$, получим

$$2(h - mgy)y'' + mg(1 + y'^2) = 0. \tag{5.38}$$

Продифференцировав это уравнение по x, имеем

$$2(h - mgy)y''' = 0,$$

или $y''' = 0$, так как $h - mgy \neq 0$. Следовательно,

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{5.39}$$

Для нахождения связи между постоянными a, b и c подставим найденное y в уравнение (5.38)

$$4a\,[h - mg(ax^2 + bx + c)] + mg[1 + b^2 + 4abx + 4a^2x] = 0.$$

Отсюда

$$c = \frac{h}{mg} + \frac{1 + b^2}{4a}. \tag{5.40}$$

Семейство траекторий (5.39) представляет собой семейство парабол с вертикальной осью. Для нахождения искомой траектории следует определить a и b из уравнений

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c, \qquad y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c,$$

где c определяется формулой (5.40). Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; тогда $c = 0$. Из формулы (5.40) следует

$$a = -\frac{mg(1 + b^2)}{4h} < 0.$$

Уравнение для определения b имеет вид

$$b^2 - \frac{4h}{mgx_1}\,b + \frac{4hy_1}{mgx_1^2} + 1 = 0. \tag{5.41}$$

Отметим, что выбор точки (x_1, y_1) не может быть произвольным при заданном h. Из уравнения (5.41) следует, что b будет иметь действительные значения при

$$4h\,(h - mgy_1) > m^2g^2x_1^2, \tag{5.42}$$

т. е. во всяком случае должно быть $h > mgy_1$. При выполнении условия (5.42) a и b имеют по два значения, что соответствует факту пересечения в точках (0, 0) и (x_1, y_1) двух парабол (рис. 5.3).

Наименьшему действию соответствует парабола *1*, так как время движения по этой параболе от точки (0, 0) к (x_1, y_1) меньше, чем по другой параболе.

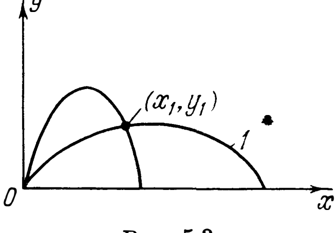


Рис. 5.3

Пример 5.3 (задача о брахистохроне). В 1696 г. И. Бернулли поставил и решил следующую задачу. Материальная точка, имеющая начальную скорость, равную нулю, движется под действием силы тяжести по некоторой кривой, соединяющей две заданные точки. Найти такую кривую (*брахистохрону*), при движении по которой время движения будет наименьшим. Эта задача получила название *задачи о брахистохроне* и положила начало вариационному исчислению.

Пусть начальная точка будет началом координат, а вторая точка имеет координаты x_1, y_1 (рис. 5.4). Время движения по кривой (при постоянном h) определяется формулой (5.37)

$$t - t_0 = \int\limits_{(q_1^1)}^{(q_1^2)} \frac{\sqrt{R}}{2\,(h - \Pi)}\,dq_1.$$

Пусть в рассматриваемой задаче $q_1 = x$, $q_2 = y$. Кинетическая и потенциальная энергии выражаются формулами

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \Pi = -mgy.$$

В силу начальных условий из интеграла энергии $T + \Pi = h$ следует, что $h = 0$ и функция

$$\sqrt{R} = \sqrt{2m^2 y (1 + y'^2)}.$$

Принимая $t_0 = 0$, перепишем выражение (5.37) в виде

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx. \qquad (5.43)$$

Таким образом, поставленная задача сводится к нахождению минимума интеграла (5.43), т. е. к нахождению функции $y(x)$, при которой этот интеграл имеет наименьшее значение. Уравнение кривой $y = y(x)$ определяется из уравнения (см. (5.36))

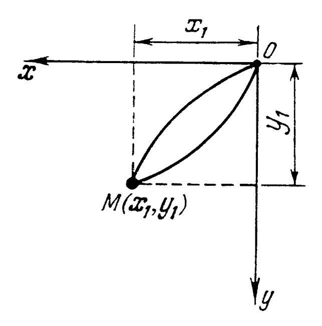


Рис. 5.4

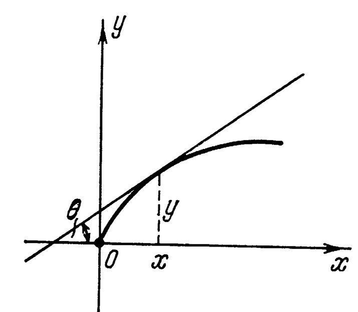


Рис. 5.5

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\right) = 0.$$

Производя необходимые вычисления, получим

$$2yy'' + (1 + y'^2) = 0.$$

Введя замену $u = y'$, имеем

$$\frac{2u\,du}{1 + u^2} = -\frac{dy}{y}.$$

Отсюда

$$\ln (1 + u^2) = \ln c_1 - \ln y$$

и

$$y = \frac{c_1}{1 + y'^2},$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Так как

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg} \theta, \qquad (5.44)$$

где θ — угол наклона касательной к кривой $y = y(x)$ (рис. 5.5), то

$$y = \frac{c_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = c_1 \cos^2 \theta = \frac{c_1}{2}(1 + \cos 2\theta). \tag{5.45}$$

Из соотношения (5.44) находим $dx = \operatorname{ctg} \theta \, dy$, а из формулы (5.45)

$$dy = -c_1 \sin 2\theta \, d\theta.$$

Следовательно,

$$dx = -2c_1 \cos^2 \theta \, d\theta = -c_1(1 + \cos 2\theta) d\theta.$$

Отсюда

$$x = -\frac{c_1}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + c_2, \tag{5.46}$$

где c_2 — постоянная интегрирования. Кривая, определяемая уравнениями (5.45) и (5.46), представляет собой дугу циклоиды.

§ 5.6. Оптико-механическая аналогия

Рассмотрим изложенный в предыдущем параграфе принцип стационарного (наименьшего) действия Лагранжа в форме Якоби в применении к движению одной материальной точки в поле потенциальных сил. Пусть x, y, z — декартовы координаты этой точки, а $\Pi(x, y, z)$ — ее потенциальная энергия. Тогда, согласно (5.33), действие по Лагранжу записывается в виде

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{2m(h - \Pi)} \, ds,$$

где $ds = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2}$ — элементарная дуга пути, проходимого материальной точкой за время dt. Если ввести в рассмотрение потенциал $U = h - \Pi$, то принцип наименьшего действия Лагранжа в форме Якоби можно выразить в форме

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{U} \, ds = 0. \tag{5.47}$$

Здесь отброшен отличный от нуля множитель $\sqrt{2m}$. В выражении (5.47) время t явно не содержится; поэтому вариация δ является изохронной, и варьирование траектории движения производится в пространстве конфигураций Φ_3, совпадающем с обычным пространством x, y, z. Исходя из (5.47), можно найти траекторию движения материальной точки в пространстве xyz (под действием сил потенциального поля) между любыми заданными точками (1) и (2). Напоминаем, что принцип (5.47) формулируется в механике.

С другой стороны, в оптике существует *принцип Ферма*, согласно которому в оптически неоднородной среде с коэффициентом преломления $n = n(x, y, z)$ луч света между точками (1) и (2) искривляется так, что фронт световой волны, перемещаясь

из точки (1) в точку (2) вдоль этой кривой, достигает точки (2) за наименьшее время. Для получения математического выражения принципа Ферма воспользуемся тем, что по определению

$$n(x, y, z) = \frac{c}{v} = \frac{c\,dt}{ds},$$

где v — скорость света в оптически неоднородной среде, а c — скорость света в пустоте. Время пробега τ фронта световой волны от точки (1) до точки (2) определяется интегралом

$$\tau = \int_{(1)}^{(2)} dt = \frac{1}{c}\int_{(1)}^{(2)} n\,ds.$$

Отсюда следует, что траектория луча света между точками (1) и (2) может быть найдена, исходя из выражения

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} n\,ds = 0, \tag{5.48}$$

которое и представляет собою математическую форму записи принципа Ферма в оптике.

Сравнивая (5.48) и (5.47), нетрудно видеть, что эти выражения совпадают, только роль $\sqrt{U}$ в механике играет коэффициент преломления n в оптике. В этом и состоит оптико-механическая аналогия. Ее смысл заключается в том, что луч света в оптически неоднородной среде с коэффициентом преломления $n(x, y, z)$ имеет такую же форму, как и траектория частицы (например, электрона), движущейся в потенциальном силовом поле (например, в электрическом поле) с потенциалом U, для которого выполняется соотношение $\sqrt{U} = n \cdot \mathrm{const}$. Опираясь на эту аналогию, которую иногда называют *электронно-оптической аналогией*, конструируют электронные микроскопы и другие подобные приборы, позволяющие видеть малые объекты, размеры которых лежат довольно далеко за пределами разрешающей способности обычных оптических микроскопов.

В качестве примера покажем, как можно, исходя из «механического» принципа (5.47), получить известный «оптический» *закон Снеллиуса*. Согласно этому закону при переходе луча света из оптически однородной среды с коэффициентом преломления $n_1 = \mathrm{const}$ в оптически однородную среду с коэффициентом преломления $n_2 = \mathrm{const}$ выполняется соотношение

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{5.49}$$

где α — угол падения луча на границу раздела двух сред, β — угол преломления луча.

Пример 5.4. Пусть материальная точка движется в плоскости xy из точки (1), которая находится в полуплоскости $y > 0$ с силовым потенциалом U_1, в точку (2), которая находится в полуплоскости $y < 0$ с силовым потенциалом U_2. Найти координату x точки, в которой материальная точка пересечет границу раздела $y = 0$ двух полуплоскостей $y > 0$ и $y < 0$ при своем движении.

Из предыдущего ясно, что как в полуплоскости $y > 0$, так и в полуплоскости $y < 0$ траекториями движения материальной точки будут отрезки прямых. Согласно обозначениям на рис. 5.6 эти отрезки равны $\sqrt{a^2 + x^2}$ в полуплоскости $y > 0$ и $\sqrt{b^2 + (c - x)^2}$ в полуплоскости $y < 0$. Согласно принципу стационарного (наименьшего) действия Лагранжа (5.47) вдоль траектории действительного движения выполняется равенство

$$\delta[\sqrt{U_1}\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{U_2}\sqrt{b^2 + (c - x)^2}] = 0.$$

Выполняя операции варьирования, получаем

$$\left[+\sqrt{U_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \sqrt{U_2}\frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}\right]\delta x = 0$$

Рис. 5.6

и в силу произвольности величины δx приходим к уравнению

$$\sqrt{U_1}\,\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \sqrt{U_2}\,\frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0, \tag{5.50}$$

корень которого и является искомой координатой точки пересечения границы $y = 0$ рассматриваемой материальной точкой.

Если учесть, что $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin\alpha$, $\dfrac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin\beta$, то уравнение (5.50) совпадает с законом Снеллиуса (5.49) для оптических сред с коэффициентами преломления $n_1 = \sqrt{U_1}$, $n_2 = \sqrt{U_2}$.

Глава 6

НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 6.1. Число степеней свободы неголономной системы

Наиболее существенные успехи в развитии механики неголономных систем связаны с именами С. А. Чаплыгина, В. Вольтерра, П. В. Воронца и П. Аппеля. В этой главе будут рассмотрены лишь некоторые методы составления дифференциальных уравнений движения неголономных систем. Достаточно полное изложение механики неголономных систем содержится в монографиях А. И. Лурье [30] и Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева [37].

В этой главе будут рассмотрены системы с линейными неголономными связями, т. е. со связями, в уравнения которых проекции скоростей входят линейно. Уравнения таких связей имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{N} (A_{\mu\nu}\dot{x}_\nu + B_{\mu\nu}\dot{y}_\nu + C_{\mu\nu}\dot{z}_\nu) + D_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \quad (6.1)$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{N} (A_{\mu\nu}\,dx_\nu + B_{\mu\nu}\,dy_\nu + C_{\mu\nu}\,dz_\nu) + D_\mu\,dt = 0 \qquad (6.2)$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

где m — число неголономных связей, $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $C_{\mu\nu}$, D_μ — функции координат и времени. Если $D_\mu \equiv 0$, то указанные связи называются однородными линейными неголономными. В том случае, когда коэффициенты $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $C_{\mu\nu}$, D_μ в уравнениях неголономных связей зависят явно от времени и (или) $D_\mu \neq 0$, неголономные связи являются нестационарными (или реономными) вследствие того, что уравнения (6.1), будучи записанными в пфаффовой форме (6.2), все же содержат время в виде дифференциала dt.

Пусть на материальную систему наложено k голономных связей

$$f_j(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (6.3)$$

и m неголономных связей вида (6.2). Тогда вариации координат должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}\,\delta x_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu}\,\delta y_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}\,\delta z_\nu \right) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k), \qquad (6.4)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} (A_{\mu\nu}\,\delta x_\nu + B_{\mu\nu}\,\delta y_\nu + C_{\mu\nu}\,\delta z_\nu) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \quad (6.5)$$

Следовательно, если эти $k+m$ уравнений независимы, то число независимых вариаций координат равно $3N-k-m$. Это число независимых вариаций координат и будет *числом степеней свободы неголономной системы.*

Всякая геометрическая связь является также и кинематической связью, т. е. ограничения, накладываемые на координаты точек, накладывают ограничения и на скорости точек. Но наличие неинтегрируемых кинематических связей не влияет на независимость координат. Это будет показано в приводимых ниже примерах.

Пример 6.1. Пусть тело A перемещается по неподвижной плоскости, касаясь ее в трех точках (рис. 6.1). Предположим, что одна из точек касания M является точкой касания острого конька поверхности плоскости и может перемещаться только вдоль плоскости конька, движение же двух других точек по плоскости пусть будет свободным (так как расположение этих точек несущественно, то на рисунке они не показаны).

Поскольку тело A совершает плоское движение, его положение может быть определено координатами x и y точки M и углом φ, образуемым плоскостью конька с осью x. Условие отсутствия проскальзывания конька может быть записано в виде $v_y/v_x = \operatorname{tg}\varphi$ или, что то же,

$$\dot{y} - \dot{x}\operatorname{tg}\varphi = 0. \qquad (6.6)$$

Рис. 6.1

Итак, из-за наличия связи (6.6) изменения координат x, y и φ не могут быть произвольными; однако в силу неинтегрируемости уравнения связи (6.6) эти координаты остаются независимыми.

Пример 6.2. Рассмотрим качение без скольжения шара по горизонтальной плоскости (рис. 6.2). Положение шара будет определено, если за-

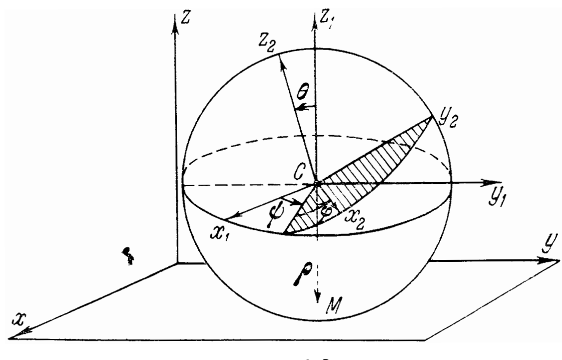


Рис. 6.2

дать координаты x_C и y_C его центра и три угла Эйлера ψ, θ и φ. Условием качения без скольжения будет равенство

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = 0, \qquad (6.7)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость шара, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор, определяющий положение точки M относительно центра шара. Следовательно, в

соответствии с условием (6.7) имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_C - a\omega_y &= 0, \\ \dot{y}_C + a\omega_x &= 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

где a — радиус шара, ω_x и ω_y — проекции угловой скорости соответственно на ось x и ось y. Так как [10]

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \qquad \omega_y = -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi,$$

то два выражения (6.8) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_C - a(\dot{\theta} \sin\psi - \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi) &= 0, \\ \dot{y}_C + a(\dot{\theta} \cos\psi + \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi) &= 0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Эти уравнения неинтегрируемы, следовательно, связь неголономная. Отметим, что в данном примере есть еще и голономная связь $z_C = a$, показывающая, что центр шара находится все время на расстоянии a от плоскости качения шара.

Таким образом, и в этом примере видно, что координаты x_C, y_C, φ, θ, ψ независимы, но изменения их в силу условий (6.9) не могут быть произвольными.

§ 6.2. Уравнения движения с множителями Лагранжа

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ будут обобщенными координатами механической системы. Пусть на систему наложено m неголономных связей вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\dot{q}_i + a_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m). \tag{6.10}$$

В § 3.6 был рассмотрен прием составления уравнений движения, если на материальную систему наложены дополнительные связи. Этот прием заключался во введении реакций дополнительных связей в число активных сил.

Воспользуемся этим приемом для учета вводимых неголономных связей (6.10). Так как вводимые связи идеальны, то

$$\sum_{\mu=1}^{N} \mathbf{R}'_\mu \delta \mathbf{r}_\mu = \sum_{i=1}^{n} Q'_i \delta q_i = 0, \tag{6.11}$$

где $\mathbf{R}'_\mu$ — реакции неголономных связей, Q'_i — обобщенные силы, соответствующие этим реакциям. Из уравнений связей (6.10) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\delta q_i = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Умножим каждое из этих соотношений на соответствующий множитель Лагранжа λ_ν и сложим полученные выражения между собой:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta q_i \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu a_{\nu i} = 0. \tag{6.12}$$

Вычитая из выражения (6.11) соотношение (6.12), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \delta q_i \left(Q'_i - \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu a_{\nu i} \right) = 0.$$

Число независимых вариаций обобщенных координат равно $n - m$. Выберем $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ так, чтобы множители у остальных m вариаций обращались в нуль. Тогда

$$Q'_i = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu a_{\nu i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.13}$$

и, следовательно, уравнения движения при наличии m неголономных связей будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu a_{\nu i}. \tag{6.14}$$

Уравнения (6.14) вместе с уравнениями связей (6.10) образуют систему $n + m$ уравнений относительно неизвестных $(q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

Пример 6.3. Пусть в примере 6.1 проекция центра тяжести тела A совпадает с точкой касания конька. Рассмотрим движение этого тела по инерции.

Кинетическая энергия тела равна

$$T = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 \right) + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2,$$

где M — масса тела, I_C — момент инерции тела относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс тела. Так как активные силы отсутствуют, то $Q_i = 0$. В силу уравнения (6.6) имеем

$$a_{11} = -\operatorname{tg}\varphi, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 0.$$

Следовательно, уравнения (6.14) примут вид

$$M\ddot{x}_C = -\lambda_1 \operatorname{tg}\varphi, \quad M\ddot{y}_C = \lambda_1, \quad I_C\ddot{\varphi} = 0. \tag{6.15}$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение связи (6.6)

$$\dot{y}_C - \dot{x}_C \operatorname{tg}\varphi = 0, \tag{6.16}$$

получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Из третьего уравнения системы (6.15) следует, что

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{const}.$$

и, следовательно,

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \tag{6.17}$$

(φ_0 — начальное значение угла φ). Исключая λ_1 из первых двух уравнений системы (6.15), получим

$$\ddot{x}_C + \ddot{y}_C \operatorname{tg}\varphi = 0. \tag{6.18}$$

Перепишем уравнения (6.16) и (6.18) в виде

$$+\dot{y}_C \cos\varphi - \dot{x}_C \sin\varphi = 0, \quad \ddot{y}_C \sin\varphi + \ddot{x}_C \cos\varphi = 0, \tag{6.19}$$

умножим первое уравнение на $\dot\varphi$ и сложим друг с другом. Получим

$$\ddot y_C \sin\varphi + \ddot x_C \cos\varphi + (\dot y_C \cos\varphi - \dot x_C \sin\varphi)\dot\varphi = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\dot y_C \sin\varphi + \dot x_C \cos\varphi\right) = 0.$$

Отсюда

$$\dot y_C \sin\varphi + \dot x_C \cos\varphi = c \tag{6.20}$$

(c — произвольная постоянная). Из уравнений (6.19) и (6.20) следует, что

$$\dot x_C = c\cos\varphi, \quad \dot y_C = c\sin\varphi,$$

откуда

$$x_C = \frac{c}{\omega}(\sin\varphi - \sin\varphi_0) + x_0, \quad y_C = -\frac{c}{\omega}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) + y_0,$$

где x_0 и y_0 — начальные значения координат x_C, y_C, $\varphi = \omega t + \varphi_0$.

Пример 6.4. Составим уравнения (6.14) для однородного шара, катящегося без скольжения по шероховатой горизонтальной плоскости по инерции (пример 6.2).

За обобщенные координаты примем

$$q_1 = x_C, \quad q_2 = y_C, \quad q_3 = \varphi, \quad q_4 = \psi, \quad q_5 = \theta.$$

Уравнения неголономных связей имеют вид (6.9), т. е.

$$\dot x_C + a\dot\varphi \sin\theta\cos\psi - a\dot\theta\sin\psi = 0,$$

$$\dot y_C + a\dot\varphi \sin\theta\sin\psi + a\dot\theta\cos\psi = 0,$$

или

$$\dot q_1 + a\dot q_3 \sin q_5 \cos q_4 - a\dot q_5 \sin q_4 = 0,$$

$$\dot q_2 + a\dot q_3 \sin q_5 \sin q_4 + a\dot q_5 \cos q_4 = 0.$$

Сравнивая эти выражения с формулами (6.10), получим

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = a\sin q_5\cos q_4 = a\sin\theta\cos\psi,\\ &a_{14} = 0, \quad a_{15} = -a\sin q_4 = -a\sin\psi, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1,\\ &a_{23} = a\sin q_5\sin q_4 = a\sin\theta\sin\psi, \quad a_{21} = 0,\\ &a_{25} = a\cos q_4 = a\cos\psi. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot x_C^2 + \dot y_C^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right);$$

так как шар однородный, то $I_x = I_y = I_z = I$ и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot x_C^2 + \dot y_C^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right).$$

Подставляя сюда выражения

$$\omega_x = \dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi,$$

$$\omega_y = -\dot\varphi\sin\theta\cos\psi + \dot\theta\sin\psi,$$

$$\omega_z = \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta,$$

будем иметь

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot x_C^2 + \dot y_C^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\dot\psi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta\right).$$

Найдем производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} = M\dot{x}_C, \quad \frac{\partial T}{\partial x_C} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} = M\dot{y}_C, \quad \frac{\partial T}{\partial y_C} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right), \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -I\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta$$

и составим уравнения (6.14), приняв во внимание соотношения (6.21):

$$M\ddot{x}_C = \lambda_1, \qquad M\ddot{y}_C = \lambda_2,$$

$$I(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) = \lambda_1 a \sin\theta\cos\psi + \lambda_2 a \sin\theta\sin\psi,$$

$$I(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta) = 0,$$

$$I(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta) = -\lambda_1 a \sin\psi + \lambda_2 a \cos\psi.$$

К этим уравнениям следует присоединить два уравнения неголономных связей

$$\dot{x}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - a\dot{\theta}\sin\psi = 0,$$

$$\dot{y}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + a\dot{\theta}\cos\psi = 0.$$

Исключая из полученных уравнений λ_1 и λ_2, найдем

$$I(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) = Ma\sin\theta(\ddot{x}_C\cos\psi + \ddot{y}_C\sin\psi),$$

$$I(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta) = 0,$$

$$I(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta) = Ma(\ddot{y}_C\cos\psi - \ddot{x}_C\sin\psi)$$

и

$$\dot{x}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - a\dot{\theta}\sin\psi = 0,$$

$$\dot{y}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + a\dot{\theta}\cos\psi = 0.$$

Полученные уравнения являются достаточно сложными. В следующем параграфе эта же задача будет рассмотрена другим методом и будут найдены первые интегралы составленной системы дифференциальных уравнений.

§ 6.3. Уравнения движения в квазикоординатах

В случае голономных связей уравнения движения в квазикоординатах были получены в § 3.7 (уравнения (3.108)).

Пусть теперь на рассматриваемую систему будет наложено m неголономных связей вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\dot{q}_i + a_\nu = 0 \qquad (\nu = n - m + 1, \ldots, n), \tag{6.22}$$

где $a_{\nu i}$, a_ν зависят от обобщенных координат и, может быть, времени.

Введем квазикоординаты $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ при помощи соотношений

$$\dot{\pi}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\dot{q}_i + a_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.23}$$

так, чтобы правые части соотношений (6.23) совпадали с левыми частями уравнений неголономных связей (6.22), а в остальных соотношениях (6.23) коэффициенты a_{ji}, a_j могут быть произвольными функциями обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и времени t, но такими, чтобы детерминант матрицы $\|a_{ji}\|$ не обращался в нуль тождественно.

Тогда уравнения движения неголономной системы записываются в виде $n-m$ уравнений в квазикоординатах (3.108), т. е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ijk}\dot{\pi}_k + \gamma_{ij}\right) = \Pi_i \tag{6.24}$$
$$(i = 1, \ldots, n-m).$$

Здесь T^* — функция переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_n, t$, которая получается в результате замены всех обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ на квазискорости $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_n$ посредством соотношений

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{\pi}_k + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.25}$$

являющихся обращением уравнений (6.23).

Символ $\frac{\partial T^*}{\partial \pi_i}$ обозначает операцию $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial q_k} b_{ki}$, а Π_i — обобщенная сила, которая совершает работу при изменении квазикоординаты π_i и вычисляется из выражения виртуальной работы и равна $\Pi_i = \sum_{k=1}^{n} Q_k b_{ki}$. Коэффициенты γ_{ijk}, γ_{ij} вычисляются путем составления перестановочных соотношений

$$d\delta\pi_j - \delta d\pi_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ijk}\delta\pi_i d\pi_k + \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}dt\,\delta\pi_i, \tag{6.26}$$

исходя из (6.23) и (6.25) (см. § 3.8).

После выполнения всех указанных в (6.24) операций в этих уравнениях следует положить нулю квазискорости

$$\dot{\pi}_{n-m+1} = 0, \ \dot{\pi}_{n-m+2} = 0, \ \ldots, \ \dot{\pi}_n = 0. \tag{6.27}$$

В итоге получаем $n-m$ уравнений динамики (6.24), $n-m$ первых уравнений системы (6.23) и m уравнений неголономных

связей (6.22), т. е. систему $2(n-m)+m=2n-m$ дифференциальных уравнений для определения $2n-m$ неизвестных $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_{n-m}$ как функций времени.

Если составить m уравнений динамики (6.24) для последних квазикоординат $\pi_{n-m+1}, \pi_{n+m+2}, \ldots, \pi_n$, то получим уравнения для определения m реакций неголономных связей.

Пример 6.5. Составим уравнения в квазикоординатах для свободного движения однородного шара по горизонтальной шероховатой плоскости.

Как и в § 6.2, примем $q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = \varphi$, $q_4 = \psi$, $q_5 = \theta$. Неголономные связи имеют вид

$$\dot{x}_C - a\omega_y = 0, \quad \dot{y}_C + a\omega_x = 0.$$

Кинетическая энергия без учета этих связей

$$T = \frac{1}{2} M\left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2\right) + \frac{1}{2} I\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right).$$

За квазискорости примем

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}_1 &= \omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\
\dot{\pi}_2 &= \omega_y = -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \\
\dot{\pi}_3 &= \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}, \\
\dot{\pi}_4 &= a\dot{\theta}\sin\psi - a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{x}_C, \\
\dot{\pi}_5 &= a\dot{\theta}\cos\psi + a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{y}_C.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

(В силу уравнений неголономных связей $\dot{\pi}_4 = 0$, $\dot{\pi}_5 = 0$.) Из этих уравнений найдем обобщенные скорости

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_C = a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4, \quad \dot{y}_C = -a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5, \\
&\dot{\varphi} = \dot{\pi}_1 \frac{\sin\psi}{\sin\theta} - \dot{\pi}_2 \frac{\cos\psi}{\sin\theta}, \\
&\dot{\psi} = -\dot{\pi}_1 \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\cos\theta + \dot{\pi}_2 \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\cos\theta + \dot{\pi}_3, \\
&\dot{\theta} = \dot{\pi}_1\cos\psi + \dot{\pi}_2\sin\psi.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Запишем теперь выражения для T^*

$$T^* = \frac{1}{2} M\left[\left(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4\right)^2 + \left(-a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5\right)^2\right] + \frac{I}{2}\left(\dot{\pi}_1^2 + \dot{\pi}_2^2 + \dot{\pi}_3^2\right).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_1} &= -Ma\left(-a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5\right) + I\dot{\pi}_1 = \left(I + Ma^2\right)\dot{\pi}_1 - Ma\dot{\pi}_5, \\
\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_2} &= Ma\left(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4\right) + I\dot{\pi}_2 = \left(I + Ma^2\right)\dot{\pi}_2 - Ma\dot{\pi}_4, \\
\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_3} &= I\dot{\pi}_3.
\end{aligned}$$

Поскольку обобщенные координаты в выражение для кинетической энергии не входят, то

$$\frac{\partial T^*}{\partial \pi_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Перейдем к нахождению трехиндексных коэффициентов γ_{ijk}. Для этого воспользуемся формулой (6.26), которая в нашем случае склерономных неголономных связей имеет вид

$$d(\delta\pi_j) - \delta(d\pi_j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ijk}\delta\pi_i d\pi_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6.30)$$

Пользуясь соотношениями (6.28) и (6.29), получим

$$\begin{aligned}
d\pi_1 &= d\varphi \sin\theta \sin\psi + d\theta \cos\psi,\\
d\pi_2 &= -d\varphi \sin\theta \cos\psi + d\theta \sin\psi,\\
d\pi_3 &= d\varphi \cos\theta + d\psi,\\
d\pi_4 &= -a\, d\varphi \sin\theta \cos\psi + a\, d\theta \sin\psi - dx_C,\\
d\pi_5 &= a\, d\varphi \sin\theta \sin\psi + a\, d\theta \cos\psi + dy_C,\\
\delta\pi_1 &= \delta\varphi \sin\theta \sin\psi + \delta\theta \cos\psi,\\
\delta\pi_2 &= -\delta\varphi \sin\theta \cos\psi + \delta\theta \sin\psi,\\
\delta\pi_3 &= \delta\varphi \cos\theta + \delta\psi,\\
\delta\pi_4 &= -a\, \delta\varphi \sin\theta \cos\psi + a\, \delta\theta \sin\psi - \delta x_C,\\
\delta\pi_5 &= a\, \delta\varphi \sin\theta \sin\psi + a\, \delta\theta \cos\psi + \delta y_C,\\
d\varphi &= \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\, d\pi_1 - \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\, d\pi_2,\\
d\psi &= -\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\cos\theta\, d\pi_1 + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\cos\theta\, d\pi_2 + \delta\pi_3,\\
d\theta &= \cos\psi\, d\pi_1 + \sin\psi\, d\pi_2,\\
\delta x_C &= a\,\delta\pi_2 - \delta\pi_4, \quad \delta y_C = -a\,\delta\pi_1 + \delta\pi_5,\\
\delta\varphi &= \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,\delta\pi_1 - \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\,\delta\pi_2,\\
\delta\psi &= -\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\cos\theta\,\delta\pi_1 + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\cos\theta\,\delta\pi_2 + \delta\pi_3,\\
\delta\theta &= \cos\psi\,\delta\pi_1 + \sin\psi\,\delta\pi_2.
\end{aligned}$$

В соответствии с формулой (6.30) получим

$$\begin{aligned}
d(\delta\pi_1) - \delta(d\pi_1) &= -\delta\pi_2 d\pi_3 + \delta\pi_3 d\pi_2,\\
d(\delta\pi_2) - \delta(d\pi_2) &= \delta\pi_1 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_1,\\
d(\delta\pi_3) - \delta(d\pi_3) &= -\delta\pi_1 d\pi_2 + \delta\pi_2 d\pi_1,\\
d(\delta\pi_4) - \delta(d\pi_4) &= a\,\delta\pi_1 d\pi_3 - a\,\delta\pi_3 d\pi_1,\\
d(\delta\pi_5) - \delta(d\pi_5) &= -a\,\delta\pi_2 d\pi_3 + a\,\delta\pi_3 d\pi_2.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_{213} = -\gamma_{312} = -1, \quad \gamma_{123} = -\gamma_{321} = -1,$$
$$\gamma_{132} = -\gamma_{231} = -1, \quad \gamma_{143} = -\gamma_{341} = a, \quad \gamma_{253} = -\gamma_{352} = -a.$$

Остальные γ_{ijk} равны нулю.

Подсчитаем теперь суммы

$$\sum_{\mu=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\gamma_{1\mu j}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_\mu}\dot{\pi}_j =$$
$$= (I+Ma^2)\dot{\pi}_2\dot{\pi}_3 - Ma\dot{\pi}_4\dot{\pi}_3 - Ma\left(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4\right)\dot{\pi}_3 - I\dot{\pi}_3\dot{\pi}_2 = 0,$$

$$\sum_{\mu=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\gamma_{2\mu j}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_\mu}\dot{\pi}_j =$$
$$= -(I+Ma^2)\dot{\pi}_1\dot{\pi}_3 + Ma\dot{\pi}_5\dot{\pi}_3 + I\dot{\pi}_3\dot{\pi}_1 - Ma\left(-a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5\right)\dot{\pi}_3 = 0,$$

$$\sum_{\mu=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\gamma_{3\mu j}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_\mu}\dot{\pi}_j = (I+Ma^2)\dot{\pi}_1\dot{\pi}_2 - Ma\dot{\pi}_5\dot{\pi}_2 -$$
$$-(I+Ma^2)\dot{\pi}_2\dot{\pi}_1 + Ma\dot{\pi}_4\dot{\pi}_1 + Ma\left(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4\right)\dot{\pi}_1 + Ma\left(-a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5\right)\dot{\pi}_2 = 0.$$

Следовательно, уравнения (6.24) будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial\dot{\pi}_1}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial\dot{\pi}_2}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_3}\right) = 0. \qquad (6.31)$$

Так как в силу неголономных связей $\dot{\pi}_4 = 0$, $\dot{\pi}_5 = 0$, то из уравнений (6.31) получим

$$\dot{\pi}_1 = \omega_x = c_1, \quad \dot{\pi}_2 = \omega_y = c_2, \quad \dot{\pi}_3 = \omega_z = c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования. Учитывая значения $\dot{\pi}_1$, $\dot{\pi}_2$, $\dot{\pi}_3$, получим

$$\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi = c_1,$$
$$-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi = c_2,$$
$$\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = c_3.$$

Из уравнений неголономных связей следует, что $\dot{x}_C = ac_2$, $\dot{y}_C = -ac_1$. Таким образом, первые интегралы уравнений движения известны.

§ 6.4. Уравнения Аппеля [16, 37]

Пусть на материальную систему, состоящую из N точек, наложено k голономных и m неголономных связей. Если $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_n$, где $n = 3N - k$ — независимые обобщенные координаты, то формулы

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \qquad (6.32)$$

устанавливают связь между декартовыми и обобщенными координатами. Из формул (6.32) следует, что

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{6.33}$$

и

$$\delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.34}$$

Пусть уравнения неголономных связей имеют вид

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{k\mu} \dot{q}_\mu + a_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{6.35}$$

Выберем за $n-m$ независимых квазискоростей (по числу степеней свободы) $n-m$ независимых линейных комбинаций обобщенных скоростей

$$\dot{\pi}_\varkappa = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\varkappa\mu} \dot{q}_\mu \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-m). \tag{6.36}$$

Из уравнений (6.35) и (6.36) определим зависимость обобщенных скоростей от квазискоростей $\dot{\pi}_\varkappa$. Очевидно, что это можно сделать в том случае, если определитель системы уравнений (6.35) и (6.36) отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-m,1} & \alpha_{n-m,2} & \ldots & \alpha_{n-m,n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть найденная зависимость имеет вид

$$\dot{q}_i = \sum_{\mu=1}^{n-m} b_{i\mu} \dot{\pi}_\mu + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.37}$$

где $b_{i\mu}$ и b_i — функции времени и обобщенных координат. Величины $\dot{\pi}_\mu$ могут принимать произвольные значения, так как по формулам (6.37) всегда можно подобрать соответствующие им значения $\dot{q}_i$. Подставляя теперь значения $\dot{q}_i$, определяемые формулами (6.37), в формулу (6.33), получим

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \left(\sum_{\mu=1}^{n-m} b_{i\mu} \dot{\pi}_\mu + b_i \right) + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n-m} \dot{\pi}_\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} b_{i\mu} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} b_i + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

Введя обозначения

$$\mathbf{l}_{\nu\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} b_{i\mu}, \quad \mathbf{l}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} b_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t},$$

будем иметь

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n-m} \mathbf{l}_{\nu\mu}\dot{\pi}_\mu + \mathbf{l}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{6.38}$$

откуда

$$\delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n-m} \mathbf{l}_{\nu\mu}\delta\pi_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.39}$$

Вычислим производную по времени от выражения (6.38):

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n-m} \mathbf{l}_{\nu\mu}\ddot{\pi}_\mu + \sum_{\mu=1}^{n-m} \dot{\pi}_\mu \frac{d}{dt}(\mathbf{l}_{\nu\mu}) + \frac{d}{dt}\mathbf{l}_\nu.$$

Отсюда видно, что частная производная от ускорения $\mathbf{w}_\nu = \ddot{\mathbf{r}}_\nu$ ν-й точки по $\ddot{\pi}_\mu$ равна $\mathbf{l}_{\nu\mu}$, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_\mu} = \mathbf{l}_{\nu\mu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N; \quad \mu = 1, 2, \ldots, n-m). \tag{6.40}$$

В общее уравнение динамики (2.28)

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \mathbf{w}_\nu - \mathbf{F}_\nu)\,\delta\mathbf{r}_\nu = 0$$

подставим $\delta\mathbf{r}_\nu$, определяемое формулой (6.39):

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \mathbf{w}_\nu - \mathbf{F}_\nu)\cdot \sum_{\mu=1}^{n-m} \mathbf{l}_{\nu\mu}\delta\pi_\mu = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{\mu=1}^{n-m} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{w}_\nu \mathbf{l}_{\nu\mu} - \Pi_\mu \right) \delta\pi_\mu = 0, \tag{6.41}$$

где Π_μ — обобщенные силы, соответствующие квазикоординатам π_μ,

$$\Pi_\mu = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \mathbf{l}_{\nu\mu} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} b_{i\mu}. \tag{6.42}$$

Так как величины $\delta\pi_\mu$ взаимно независимы, то из выражения (6.41) следует

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{w}_\nu \mathbf{j}_{\nu\mu} = \Pi_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n-m). \tag{6.43}$$

Используя зависимость (6.40), получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{w}_\nu \frac{\partial \mathbf{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_\mu} = \Pi_\mu,$$

или $\left[\text{так как } \mathbf{w}\cdot\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \ddot{\pi}} = w\frac{\partial w}{\partial \ddot{\pi}} = \frac{\partial}{\partial \ddot{\pi}}\left(\frac{w^2}{2}\right)\right]$

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{\pi}_\mu}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu w_\nu^2}{2} = \Pi_\mu. \tag{6.44}$$

Функция

$$S = \sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu w_\nu^2}{2} \tag{6.45}$$

называется *энергией ускорений* (по аналогии с кинетической энергией). Таким образом, получаем $n-m$ уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\mu} = \Pi_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{6.46}$$

которые называются *уравнениями Аппеля*.

Система уравнений (6.46) совместно с соотношениями (6.35) составляет полную систему уравнений для определения декартовых координат $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ и квазискоростей $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_{n-m}$ как функций времени t.

Возьмем теперь в качестве квазискоростей $n-m$ независимых обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{n-m}$ и выразим через них с помощью соотношений (6.35) остальные m обобщенных скоростей:

$$\dot{q}_{n-m+\nu} = \sum_{\mu=1}^{n-m} h_{n-m+\nu,\mu}\dot{q}_\mu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда

$$\delta q_{n-m+\nu} = \sum_{\mu=1}^{n-m} h_{n-m+\nu,\mu}\delta q_\mu. \tag{6.47}$$

Заменяя теперь в выражении для виртуальной работы

$$\delta A = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j$$

вариации $\delta q_{n-m+\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) с помощью формул (6.47), получим

$$\delta A = \sum_{\mu=1}^{n-m} Q_\mu^* \delta q_\mu,$$

где

$$Q_\mu^* = Q_\mu - \sum_{\nu=1}^{m} Q_{n-m+\nu} h_{n-m+\nu,\mu}$$

— обобщенные силы, соответствующие независимым вариациям δq_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, n-m$).

Уравнения Аппеля примут вид*)

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\mu} = Q_\mu^* \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Для голономной системы уравнениями Аппеля будут

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

При вычислении функции S бывает целесообразно использовать теорему, аналогичную теореме Кёнига.

Пусть подвижная система координат имеет начало в центре масс материальной системы и движется поступательно. Тогда положение i-й точки системы в неподвижной системе координат определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\rho}_i, \tag{6.48}$$

где $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс в неподвижной системе координат, а $\boldsymbol{\rho}_i$ — радиус-вектор точки i в подвижной системе координат. Из выражения (6.48) следует, что

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_C + \mathbf{w}_{ri}, \tag{6.49}$$

где $\mathbf{w}_{ri}$ — относительное ускорение i-й точки. Подставим соотношение (6.49) в выражение для функции S:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i w_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i (\mathbf{w}_C + \mathbf{w}_{ri})^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} M w_C^2 + \mathbf{w}_i \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{w}_{ri} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i w_{ri}^2}{2},$$

где

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

— масса всей системы. Далее,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{w}_{ri} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{\rho}_i = \frac{d^2}{dt^2} (M \boldsymbol{\rho}_C) = 0,$$

*) Функция S будет функцией времени t, n обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $n-m$ обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{n-m}$ и $n-m$ обобщенных ускорений $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_{n-m}$.

так как $\rho_C = 0$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} M w_C^2 + S', \qquad (6.50)$$

где

$$S' = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i w_{ri}^2}{2}$$

— энергия ускорений системы в относительном движении.

Из формулы (6.50) следует, что *энергия ускорений S системы состоит из энергии ускорений ее центра масс, в котором сосредоточена масса всей системы, и энергии ускорений точек системы при их движении относительно центра масс.*

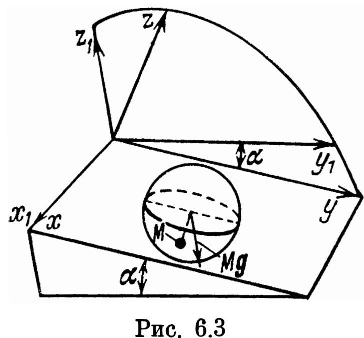


Рис. 6.3

Пример 6.6. Составить уравнение Аппеля для тяжелого однородного шара, катящегося по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью (рис. 6.3).

За независимые обобщенные координаты примем $q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = \varphi$, $q_4 = \psi$, $q_5 = \theta$, где x_C, y_C — координаты центра тяжести шара, φ, ψ, θ — углы Эйлера. Уравнение голономной связи: $z_C = a$ (a — радиус шара). Уравнения неголономных связей:

$$\dot{x}_C - a\omega_y = 0, \quad \dot{y}_C + a\omega_x = 0. \qquad (6.51)$$

Проекции угловой скорости шара на оси:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \qquad (6.52)$$

Примем за независимые квазискорости следующие выражения:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= \omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \\ \dot{\pi}_2 &= \omega_y = -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi, \\ \dot{\pi}_3 &= \omega_z = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \qquad (6.53)$$

Из уравнений (6.51) и (6.53) определим обобщенные скорости через независимые квазискорости:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_C = a\dot{\pi}_2, \quad \dot{y}_C = -a\dot{\pi}_1, \\ &\dot{\varphi} = \frac{\sin\psi}{\sin\theta} \dot{\pi}_1 - \frac{\cos\psi}{\sin\theta} \dot{\pi}_2, \\ &\dot{\psi} = -\dot{\pi}_1 \sin\psi \operatorname{ctg}\theta + \dot{\pi}_2 \cos\psi \operatorname{ctg}\theta + \dot{\pi}_3, \\ &\dot{\theta} = \dot{\pi}_1 \cos\psi + \dot{\pi}_2 \sin\psi. \end{aligned} \qquad (6.54)$$

Найдем теперь энергию ускорения. Используя формулу (6.50), получим

$$S=\frac{1}{2}Mw_C^2+S',$$

или

$$S=\frac{1}{2}M\left(\ddot{x}_C^2+\ddot{y}_C^2\right)+\frac{1}{2}I\left(\dot{\omega}_x^2+\dot{\omega}_y^2+\dot{\omega}_z^2\right),$$

где M — масса шара, I — осевой момент инерции шара. Используя формулы (6.53) и (6.54), будем иметь

$$S=\frac{1}{2}(I+Ma^2)\,\ddot{\pi}_1^2+\frac{1}{2}(I+Ma^2)\,\ddot{\pi}_2^2+\frac{1}{2}I\ddot{\pi}_3^2. \qquad (6.55)$$

Вычислим виртуальную работу

$$\delta A=X\,\delta x_C+Y\,\delta y_C+Z\,\delta z_C.$$

Но $X=0$, $Y=Mg\sin\alpha$, $Z=-Mg\cos\alpha$, а согласно формулам (6.54)

$$\delta x_C=a\,\delta\pi_2,\qquad \delta y_C=-a\,\delta\pi_1.$$

Кроме того, $\delta z_C=0$. Следовательно,

$$\delta A=-Mga\sin\alpha\,\delta\pi_1,$$

откуда $\Pi_1=-Mga\sin\alpha$, $\Pi_2=0$, $\Pi_3=0$.

Уравнения Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{\pi}_1}=\Pi_1,\qquad \frac{\partial S}{\partial\ddot{\pi}_2}=\Pi_2,\qquad \frac{\partial S}{\partial\ddot{\pi}_3}=\Pi_3$$

в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$(I+Ma^2)\ddot{\pi}_1=-Mga\sin\alpha,$$

$$(I+Ma^2)\ddot{\pi}_2=0,$$

$$I\ddot{\pi}_3=0.$$

Отсюда

$$\dot{\pi}_1=-\frac{Mga\sin\alpha}{I+Ma^2}t+c_1,\qquad \dot{\pi}_2=c_2,\qquad \dot{\pi}_3=c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования. Для обобщенных скоростей имеем

$$\dot{x}_C=ac_2,\qquad \dot{y}_C=\frac{Mga^2\sin\alpha}{I+Ma^2}t-ac_1,$$

$$\dot{\varphi}=-\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,\frac{Mga\sin\alpha}{I+Ma^2}t+c_1\frac{\sin\psi}{\sin\theta}-c_2\frac{\cos\psi}{\sin\theta},$$

$$\dot{\psi}=\sin\psi\operatorname{ctg}\theta\cdot\frac{Mga\sin\alpha}{I+Ma^2}t-c_1\sin\psi\operatorname{ctg}\theta+c_2\cos\psi\operatorname{ctg}\theta+c_3,$$

$$\dot{\theta}=-\cos\psi\frac{Mga\sin\alpha}{I+Ma^2}t+c_1\cos\psi+c_2\sin\psi.$$

Дальнейшее интегрирование первых из этих уравнений дает

$$x_C = ac_2t + c_4, \quad y_C = \frac{Mga^2 \sin\alpha}{2(I + Ma^2)} t^2 - ac_1t + c_5.$$

Это значит, что в общем случае центр масс шара движется по параболе, расположенной в плоскости, параллельной наклонной плоскости.

§ 6.5. Вывод уравнений движения неголономной системы из общего уравнения динамики. Уравнения Чаплыгина

В § 3.2 из общего уравнения динамики было получено соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \delta q_i \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = 0. \qquad (6.56)$$

Там же показано, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \equiv Q_i - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Введем в рассмотрение оператор

$$Tq_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Тогда выражение (6.56) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \delta q_i (Q_i - Tq_i). \qquad (6.57)$$

Пусть на систему наложено m неголономных связей

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\dot{q}_i + a_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m). \qquad (6.58)$$

Примем первые $n - m$ обобщенных координат за независимые и выразим обобщенные скорости $\dot{q}_{n-m+1}, \dot{q}_{n-m+2}, \ldots, \dot{q}_n$ с помощью уравнения неголономных связей через $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{n-m}$:

$$\dot{q}_k = \sum_{i=1}^{n-m} h_{ki}\dot{q}_i + h_k \qquad (k = n - m + 1, \quad n - m + 2, \ldots, n). \quad (6.59)$$

Отсюда

$$\delta q_k = \sum_{i=1}^{n-m} h_{ki}\delta q_i \qquad (k = n - m + 1, \quad n - m + 2, \ldots, n).$$

Подставляя эти выражения в соотношение (6.57), получим

$$\sum_{i=1}^{n-m} (Tq_i - Q_i)\,\delta q_i + \sum_{k=n-m+1}^{n} (Tq_k - Q_k) \sum_{i=1}^{n-m} h_{ki}\delta q_i = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n-m} \left[Tq_i - Q_i + \sum_{k=n-m+1}^{n} (Tq_k - Q_k)\, h_{ki} \right] \delta q_i = 0.$$

В силу независимости $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{n-m}$ имеем

$$Tq_i - Q_i + \sum_{k=n-m+1}^{n} (Tq_k - Q_k)\, h_{ki} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-m). \qquad (6.60)$$

Это и есть искомые уравнения движения. Присоединяя к ним уравнения неголономных связей (6.58), получим полную систему уравнений для определения всех обобщенных координат.

Перейдем теперь к выводу уравнений Чаплыгина. Свои уравнения С. А. Чаплыгин получил в предположении, что все силы являются потенциальными, а в уравнениях кинематических связей (6.58) коэффициенты $a_\nu = 0$; коэффициенты $a_{\nu i}$ не зависят явно от времени t и последних m координат $q_{n-m+1}, q_{n-m+2}, \ldots$ $\ldots, q_n$. Следовательно, в уравнениях (6.59) все $h_k = 0$ $(k = n - m + 1, n - m + 2, \ldots, n)$.

С. А. Чаплыгин рассмотрел неголономные системы в случае, когда кинетическая энергия T и потенциальная энергия П тоже не зависят от m последних координат. Такие системы теперь называются *неголономными системами Чаплыгина*.

Если коэффициенты h_{ki}, кинетическая энергия T и потенциальная энергия П не зависят от $q_{n-m+1}, q_{n-m+2}, \ldots, q_n$, то уравнения (6.60) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{k=n-m+1}^{n} h_{ki} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Пусть T^* будет кинетической энергией системы после исключения скоростей $\dot{q}_{n-m+1}, \dot{q}_{n-m+2}, \ldots, \dot{q}_n$; тогда

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=n-m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{k=n-m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k}.$$

Из выражений (6.59) следует, что

$$\frac{\partial \dot q_k}{\partial \dot q_i} = h_{ki}, \quad \frac{\partial \dot q_k}{\partial q_i} = \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial h_{kr}}{\partial q_r}\dot q_r.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \sum_{k=n-m+1}^{n} h_{ki}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{k=m-n+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial h_{kr}}{\partial q_i}\dot q_r.$$

Теперь можно написать

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) + \sum_{k=n-m+1}^{n} h_{ki}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_i}\right) - \sum_{k=n-m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\frac{dh_{ki}}{dt}.$$

Замечая, что

$$\frac{dh_{ki}}{dt} = \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial h_{ki}}{\partial q_r}\dot q_r,$$

перепишем уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} + \sum_{k=n-m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} \sum_{r=1}^{n-m}\left(\frac{\partial h_{kr}}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{ki}}{\partial q_r}\right)\dot q_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Мы получили *уравнения Чаплыгина* *).

Исключая в полученных уравнениях с помощью зависимостей (6.59) скорости $\dot q_{n-m+1}, \dot q_{n-m+2}, \ldots, \dot q_n$, входящие в выражения $\partial T/\partial \dot q_k$, получим систему $n-m$ уравнений с $n-m$ неизвестными $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-m}$, которая интегрируется независимо от уравнений неголономных связей. Остальные координаты можно затем определить из уравнений (6.59).

Пример 6.7. Составить уравнения движения велосипеда, пренебрегая движением ног велосипедиста, движением педального механизма и считая колеса велосипеда абсолютно жесткими тонкими дисками **).

Будем рассматривать велосипедиста как твердое тело, жестко скрепленное с рамой. Исходя из условий задачи и рассмотрения рис. 6.4 и 6.5, велосипед можно считать системой, состоящей из четырех кинематически связанных между собой твердых тел: рамы с седоком, переднего и заднего колес и вилки переднего колеса.

---

*) Об этих уравнениях С. А. Чаплыгин доложил на заседании физического отделения Общества любителей естествознания 25 октября 1895 г. [43].

**) Наиболее подробное изложение теории велосипеда имеется в книге [37].

На рис. 6.5 представлена схема велосипеда в вертикальном положении и при совпадении плоскости переднего колеса и рамы. Центры заднего и переднего колес соответственно обозначены буквами M_1 и M_2. Точками M_3 и M_4 обозначены соответственно положения центров масс задней части велосипеда (рама, велосипедист, заднее колесо) и передней части (вилка переднего колеса, переднее колесо). Величина $c_1 = (K_2K_3)\cos\lambda$, где

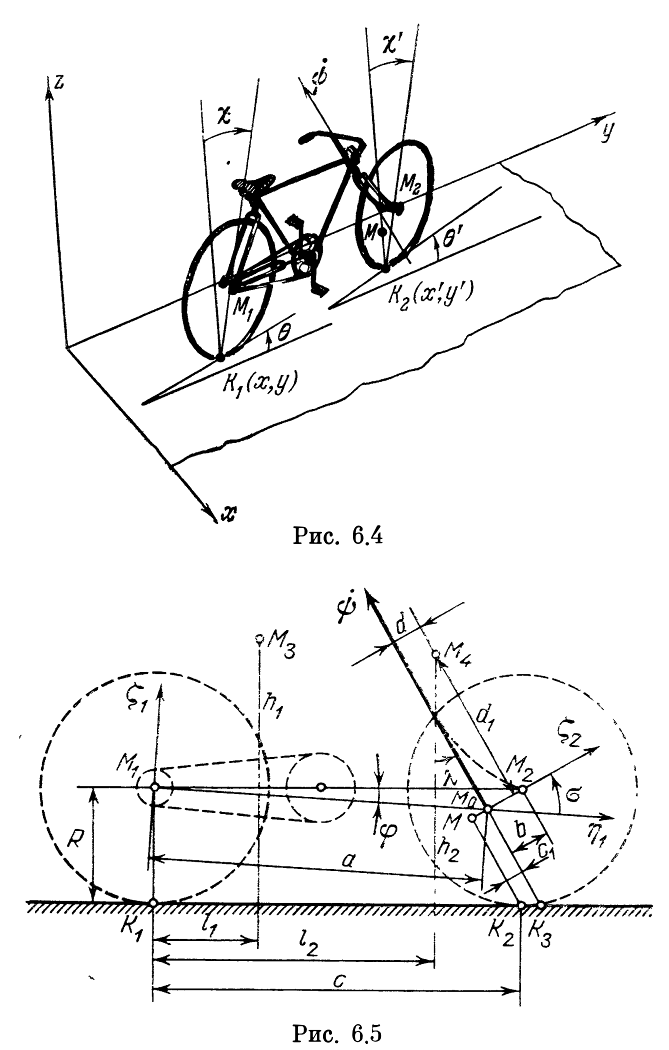


Рис. 6.4

Рис. 6.5

K_2K_3 называется выносом, величина $c = a\cos\varphi + b\cos\lambda$ называется базой велосипеда, угол λ — угол между вертикалью и рулевой осью, отрезок $MM_2 = R\sin\lambda$. В обычных конструкциях велосипеда точка M_0 лежит внутри отрезка MM_2, поэтому $c_1 > 0$; угол λ обычно положительная величина.

Предполагая, что велосипед движется по горизонтальной плоскости, примем за обобщенные координаты следующие переменные: $q_1 = \psi$ — угол поворота руля; $q_2 = \chi$ — угол наклона рамы, отсчитываемый от вертикали; $q_3 = x$, $q_4 = y$ — декартовы координаты точки K_1 соприкосновения заднего

колеса с дорогой; $q_5 = \theta$ — угол между следом заднего колеса и осью y; $q_6 = \theta_1$, $q_7 = \theta_2$ — углы собственных поворотов соответственно заднего и переднего колес. Введем вспомогательные переменные x', y', θ', χ', определяющие положение переднего колеса, и найдем их связь с обобщенными координатами. Согласно рис. 6.6 координатами центра M_1 заднего колеса будут

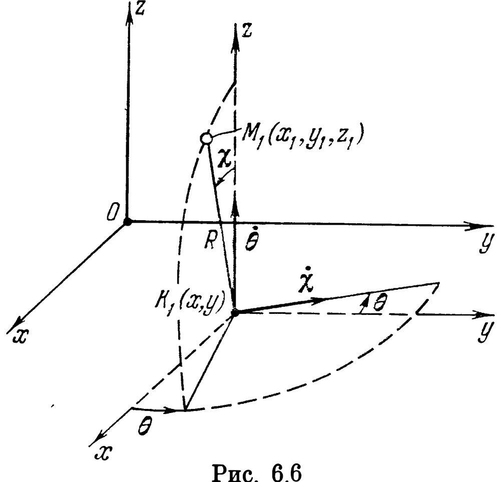


Рис. 6.6

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x + R\sin\chi\cos\theta,\\
y_1 &= y + R\sin\chi\sin\theta, \qquad (6.61)\\
z_1 &= R\cos\chi,
\end{aligned}
$$

где R — радиус колес велосипеда.

Найдем координаты точки M_0, являющейся точкой пересечения рулевой оси с перпендикуляром, опущенным на эту ось из центра M_2 переднего колеса (рис. 6.5). Пусть система координат $M_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ имеет начало в центре заднего колеса. Ось η_1 направим от точки M_1 к точке M_0, ось ζ_1 — перпендикулярно к ней в плоскости рамы, ось ξ_1 — перпендикулярно к плоскости рамы. Расположение этих осей по отношению к осям неподвижной системы координат $Oxyz$ показано на рис. 6.7. Обозначим через $\mathbf{i}$,

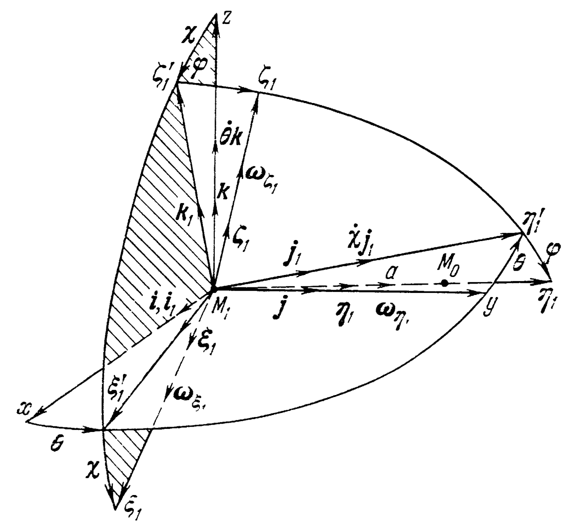


Рис. 6.7

$\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ единичные векторы осей системы $Oxyz$, через $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\zeta}_1$ — единичные векторы осей системы $M_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, а через $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ — единичные векторы вспомогательной системы координат $M_1\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$. Очевидно, что

$$
\begin{aligned}
\mathbf{i}_1 &= \cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{j},\\
\mathbf{j}_1 &= -\sin\theta\cdot\mathbf{i} + \cos\theta\cdot\mathbf{j}, \qquad (6.62)\\
\mathbf{k}_1 &= \sin\chi\cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\chi\sin\theta\cdot\mathbf{j} + \cos\chi\cdot\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

Так как

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \cos\chi\cdot\mathbf{i}_1 - \sin\chi\cdot\mathbf{k},$$
$$\boldsymbol{\eta}_1 = \cos\varphi\cdot\mathbf{j}_1 - \sin\varphi\cdot\mathbf{k}_1,$$
$$\boldsymbol{\zeta}_1 = \sin\varphi\cdot\mathbf{j}_1 + \cos\varphi\cdot\mathbf{k}_1,$$

то в соответствии с формулами (6.62) имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_1 &= \cos\chi\cos\theta\cdot\mathbf{i} + \cos\chi\sin\theta\cdot\mathbf{j} - \sin\chi\cdot\mathbf{k},\\ \boldsymbol{\eta}_1 &= (-\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\sin\chi\cos\theta)\mathbf{i} + \\ &+ (\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\chi\sin\theta)\mathbf{j} - \sin\varphi\cos\chi\cdot\mathbf{k},\\ \boldsymbol{\zeta}_1 &= (\cos\varphi\sin\chi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + \\ &+ (\cos\varphi\sin\chi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)\mathbf{j} + \cos\varphi\cos\chi\cdot\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{6.63}$$

В системе координат $M_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ точка M_0 расположена на оси η_1 на расстоянии a от точки M_1. Следовательно, ее координатами в системе $Oxyz$ будут

$$\begin{aligned}x_0 &= x_1 - a(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\chi\cos\theta),\\ y_0 &= y_1 + a(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\chi\sin\theta),\\ z_0 &= z_1 - a\sin\varphi\cos\chi,\end{aligned} \tag{6.64}$$

где x_1, y_1, z_1 определяются формулами (6.61).

Для нахождения координат центра M_2 переднего колеса введем систему координат $M_0\xi_2\eta_2\zeta_2$. Ось ζ_2 направим от точки M_0 к точке M_2, ось η_2 — по оси

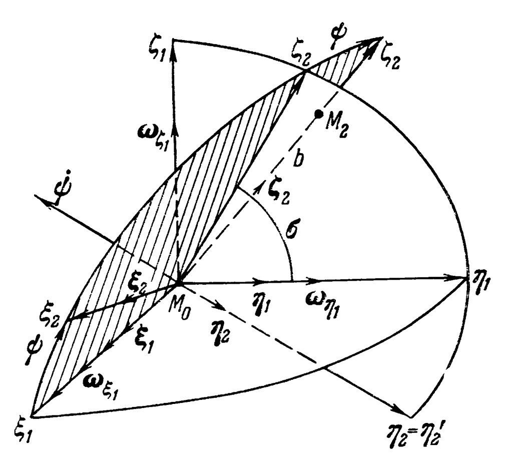


Рис. 6.8

вращения вилки, ось ξ_2 — перпендикулярно к осям ζ_2, η_2 (рис. 6.8). Из рассмотрения рис. 6.8 следует, что единичные векторы $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\zeta}_2$ системы $M_2\xi_2$, η_2, ζ_2 могут быть определены в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_2 &= \cos\psi\cdot\boldsymbol{\xi}_1 + \sin\psi\cos\sigma\cdot\boldsymbol{\eta}_1 + \sin\psi\sin\sigma\cdot\boldsymbol{\zeta}_1,\\ \boldsymbol{\eta}_2 &= \sin\sigma\cdot\boldsymbol{\eta}_1 - \cos\sigma\cdot\boldsymbol{\zeta}_1,\\ \boldsymbol{\zeta}_2 &= -\sin\psi\cdot\boldsymbol{\xi}_1 + \cos\psi\cos\sigma\cdot\boldsymbol{\eta}_1 + \cos\psi\sin\sigma\cdot\boldsymbol{\zeta}_1.\end{aligned} \tag{6.65}$$

Косинусы углов между осями системы $Oxyz$ и $M_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ равны

$$\cos(x,\ \xi_2) = \mathbf{i}\cdot\xi_2 = \cos\psi(\mathbf{i}\cdot\xi_1) + \sin\psi\cos\sigma(\mathbf{i}\cdot\eta_1) + \sin\psi\sin\ \sigma(\mathbf{i}\cdot\zeta_1) =$$
$$= \cos\psi\cos\chi\cos\theta - \sin\psi\cos\sigma(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\chi\cos\theta) +$$
$$+ \sin\psi\sin\sigma(-\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\sin\chi\cos\theta) =$$
$$= -\sin\psi[\cos(\varphi - \pi)\sin\theta + \sin\chi\cos\theta\sin(\varphi - \sigma)] + \cos\psi\cos\chi\cos\theta,$$
$$\cos(x,\ \eta_2) = \mathbf{i}\cdot\eta_2 = \sin(\varphi - \sigma)\sin\theta - \cos(\varphi - \sigma)\sin\chi\cos\theta,$$
$$\cos(y,\ \xi_2) = \mathbf{j}\cdot\xi_2 = -\cos\psi[\cos(\varphi - \sigma)\sin\theta + \sin\chi\cos\theta\sin(\varphi - \sigma)] -$$
$$-\sin\psi\cos\chi\cos\theta, \qquad (6.66)$$
$$\cos(y,\ \xi_2) = \mathbf{j}\cdot\xi_2 = \sin\psi[\cos(\varphi - \sigma)\cos\theta - \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi - \sigma)] +$$
$$+ \cos\psi\cos\chi\sin\theta,$$
$$\cos(y,\ \eta_2) = \mathbf{j}\cdot\eta_2 = -\sin(\varphi - \sigma)\cos\theta - \cos(\varphi - \sigma)\sin\chi\sin\theta,$$
$$\cos(y,\ \zeta_2) = \mathbf{j}\cdot\zeta_2 = \cos\psi\ [\cos(\varphi - \sigma)\cos\theta - \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi - \sigma)] -$$
$$-\sin\psi\cos\chi\sin\theta,$$
$$\cos(z,\ \xi_2) = \mathbf{k}\cdot\xi_2 = -\sin\psi\cos\chi\sin(\varphi - \sigma) - \cos\psi\sin\chi,$$
$$\cos(z,\ \eta_2) = \mathbf{k}\cdot\eta_2 = -\cos(\varphi - \sigma)\cos\chi,$$
$$\cos(z,\ \zeta_2) = \mathbf{k}\cdot\zeta_2 = -\cos\psi\sin(\varphi - \sigma)\cos\chi + \sin\psi\sin\chi.$$

Точка M_2 в системе координат $M_0\xi_2\eta_2\zeta_2$ имеет координаты $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\zeta_2 = b$ (рис. 6.8); следовательно, в соответствии с формулами (6.66) имеем

$$x_2 = x_0 - b\{\cos\psi[\cos(\varphi - \sigma)\sin\theta +$$
$$+ \sin\chi\cos\theta\sin(\varphi - \sigma)] +$$
$$+ \sin\psi\cos\chi\cos\theta\},$$
$$y_2 = y_0 + b\{\cos\psi[\cos(\varphi - \sigma)\cos\theta -$$
$$- \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi - \sigma)] -$$
$$-\sin\psi\cos\chi\sin\theta\}, \qquad (6.67)$$
$$z_2 = z_0 - b[\cos\psi\cos\chi\sin(\varphi - \sigma) -$$
$$- \sin\psi\sin\chi],$$

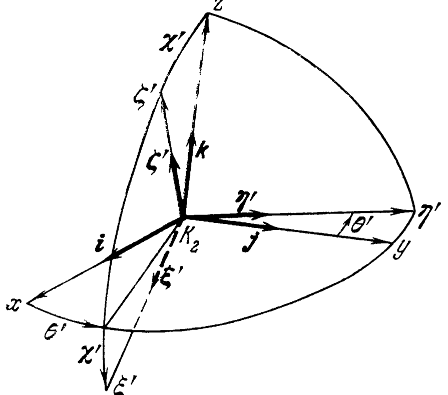


Рис. 6.9

где x_0, y_0, z_0 определяются формулами (6.64). Определим теперь координаты точки M_2 через вспомогательные переменные θ', χ', x', y'. Пусть система координат $K_2\xi'\eta'\zeta'$ имеет начало в точке касания K_2 переднего колеса с плоскостью дороги; ось η' направлена по следу переднего колеса, ось ζ' направлена к центру переднего колеса. Отметим, что ось ξ' будет параллельной оси ξ_2 (рис. 6.9). Единичные векторы осей системы $K_2\xi'\eta'\zeta'$ представим в виде

$$\xi' = \cos\chi'\cos\theta'\cdot\mathbf{i} + \cos\chi'\sin\theta'\cdot\mathbf{j} - \sin\chi'\cdot\mathbf{k},$$
$$\eta' = -\sin\theta'\mathbf{i} + \cos\theta'\mathbf{j},$$
$$\zeta' = \sin\chi'\cos\theta'\mathbf{i} + \sin\chi'\sin\theta'\mathbf{j} + \cos\chi'\mathbf{k},$$

и, следовательно,

$$x_2 = x' + R\sin\chi'\cos\theta',$$
$$y_2 = y' + R\sin\chi'\sin\theta', \qquad (6.68)$$
$$z_2 = R\cos\chi'.$$

Для нахождения связи между обобщенными координатами и вспомогательными переменными x', y', θ', χ' приравняем x_2, y_2, z_2, найденные по формулам (6.67) и (6.68), и кроме того, учтем, что ξ' и ξ_2' параллельны:

$$\begin{aligned}
&x' + R\sin\chi'\cos\theta' = x_0 - b\{\cos\psi[\cos(\varphi-\sigma)\sin\theta + \\
&\qquad\qquad + \sin\chi\cos\theta\sin(\varphi-\delta)] + \sin\psi\cos\chi\cos\theta\},\\
&y' + R\sin\chi'\sin\theta' = y_0 + b\{\cos\psi[\cos(\varphi-\sigma)\cos\theta - \\
&\qquad\qquad - \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi-\sigma)] - \sin\psi\cos\chi\sin\theta\},\\
&R\cos\chi' = z_0 - b[\cos\psi\cos\chi\sin(\varphi-\sigma) - \sin\psi\sin\chi],\\
&\cos\chi'\sin\theta' = \sin\psi[\cos(\varphi-\sigma)\cos\theta - \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi-\sigma)] + \\
&\qquad\qquad + \cos\psi\cos\chi\sin\theta,\\
&-\sin\chi = -\sin\psi\cos\chi\sin(\varphi-\sigma) - \cos\psi\sin\chi.
\end{aligned} \tag{6.69}$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь малые отклонения от движения велосипеда вдоль y.

Линеаризуя (т. е. сохраняя в выражениях (6.69) члены, содержащие малые величины только в первой степени) выражения (6.69) относительно малых величин θ, θ', χ, χ', ψ, получим

$$\begin{aligned}
&x' = x - \theta[a\cos\varphi + b\cos(\varphi-\sigma)] - \psi[b + R\sin(\varphi-\sigma)],\\
&y' = y + a\cos\varphi + b\cos(\varphi-\sigma),\\
&a\sin\varphi + b\sin(\varphi-\sigma) = 0, \quad \theta' = \theta + \psi\cos(\varphi-\sigma),\\
&\chi' = \chi + \psi\sin(\varphi-\sigma).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\varphi = \text{const}$. Вводя обозначения $\lambda = \sigma - \varphi$, $c = a\cos\varphi + b\cos\lambda$, $c_1 = R\sin\lambda - b$, окончательно получим

$$\begin{aligned}
x' &= x - c\theta + c_1\psi,\\
y' &= y + c,\\
\theta' &= \theta + \psi\cos\lambda,\\
\chi' &= \chi - \psi\sin\lambda.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Рассмотрим рис. 6.5.

Запишем условия качения колес велосипеда без проскальзывания. По условию задачи колеса представляют собой абсолютно жесткие тонкие диски; тогда для заднего колеса

$$\dot{x} = -R\dot{\vartheta}_1\sin\theta, \quad \dot{y} = R\dot{\vartheta}_1\cos\theta \tag{6.71}$$

и для переднего колеса

$$\dot{x}' = -R\dot{\vartheta}_2\sin\theta', \quad \dot{y}' = +R\dot{\vartheta}_2\cos\theta'. \tag{6.72}$$

Если заднее колесо вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = v/R$, где v — скорость велосипеда, то $\vartheta_1 = \omega t$.

Используя выражения (6.70), перепишем зависимости (6.71) и (6.72) для малых θ и θ':

$$R\dot{\vartheta}_1 = v, \quad R\dot{\vartheta}_2 = v, \quad y = v, \quad \dot{y}' = v, \tag{6.73}$$

$$\dot{x} + v\theta = 0, \quad c\dot{\theta} - c_1\dot{\psi} - v\psi\cos\lambda = 0. \tag{6.74}$$

Уравнения (6.73) являются интегрируемыми связями, а уравнения (6.74) — уравнениями неголономных связей. Таким образом, рассматриваемая система имеет две степени свободы.

Составим уравнения движения велосипеда, воспользовавшись уравнениями (6.60). Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии T_1 рамы с седоком и заднего колеса и кинетической энергии T_2 вилки

и переднего колеса. Кинетическая энергия рамы с седоком и заднего колеса равна

$$T_1 = T_1^{\text{п}} + T_1^{\text{вр}},$$

где $T_1^{\text{п}} = \frac{1}{2} m_1 v_3^2$ — кинетическая энергия поступательного движения задней части велосипеда, m_1 — масса задней части велосипеда, v_3 — скорость

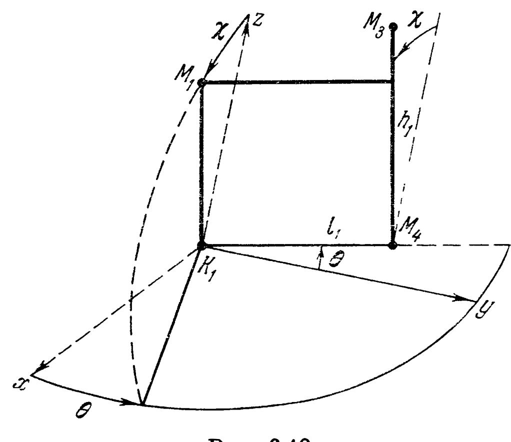


Рис. 6.10

центра масс M_3 задней части велосипеда, $T^{\text{вр}}$ — кинетическая энергия вращательного движения задней части относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс велосипеда. В соответствии с рис. 6.5 и 6.10 координатами центра масс M_3 будут

$$x_3 = x - l_1 \sin\theta + h_1 \sin\chi \cos\theta,$$
$$y_3 = y + l_1 \cos\theta + h_1 \sin\chi \sin\theta,$$
$$z_3 = h_1 \cos\chi.$$

После дифференцирования получим

$$\dot{x}_3 = \dot{x} - l_1\dot{\theta}\cos\theta + h_1\dot{\chi}\cos\chi\cos\theta - h_1\dot{\theta}\sin\chi\sin\theta,$$
$$\dot{y}_3 = v - l_1\dot{\theta}\sin\theta + h_1\dot{\chi}\cos\chi\sin\theta + h_1\dot{\theta}\sin\chi\cos\theta,$$
$$\dot{z}_3 = -h_1\dot{\chi}\sin\chi.$$

Отбрасывая постоянный член и сохраняя члены не выше второго порядка малости, имеем

$$v_3^2 = (\dot{x} - l_1\dot{\theta} + h_1\dot{\chi})^2 - 2v(l_1\theta - h_1\chi)\dot{\theta} + 2vh_1\theta\dot{\chi}.$$

Следовательно,

$$T_1^{\text{п}} = \frac{1}{2} m_1 [(\dot{x} - l_1\dot{\theta} + h_1\dot{\chi})^2 - 2v(l_1\theta - h_1\chi)\dot{\theta} + 2vh_1\dot{\theta}\chi].$$

Пусть оси $M_3x_1y_1z_1$ жестко связаны с рамой велосипеда и при $\theta = \chi = 0$ параллельны осям x, y, z. Проекции мгновенной угловой скорости задней части велосипеда на эти оси равны соответственно $-\dot{\theta}\sin\chi$, $\dot{\chi}$, $\dot{\theta}\cos\chi$. Для

заднего колеса $\omega'_{x_1} = -\frac{v}{R} - \dot{\vartheta}\sin\chi$. Тогда с точностью до малых второго порядка и без постоянного члена

$$T_1^{\text{вр}} = \frac{1}{2}\left(I_{y_1}\dot{\chi}^2 - 2I_{y_1z_1}\dot{\chi}\dot{\theta} + I_{z_1}\dot{\theta}^2\right) + I\frac{v}{R}\dot{\theta}\chi,$$

где I_{y_1}, I_{z_1}, $I_{y_1z_1}$ — соответственно момент инерции относительно оси y_1, момент инерции относительно оси z_1, центробежный момент инерции задней части велосипеда, I — момент инерции заднего колеса относительно собственной оси вращения. Таким образом,

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1[(\dot{x} - l_1\dot{\theta} + h_1\dot{\chi})^2 - 2v(l_1\theta - h_1\chi)\dot{\theta} + 2vh_1\theta\dot{\chi}] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(I_{y_1}\dot{\chi}^2 - 2I_{y_1z_1}\dot{\chi}\dot{\theta} + I_{z_1}\dot{\theta}^2\right) + I_1\frac{v}{R}\dot{\theta}\chi.$$

Кинетическая энергия передней части велосипеда (рулевая вилка и переднее колесо) вычисляется по формуле

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2v_4^2 + T_2^{\text{вр}},$$

где m_2 — масса передней части велосипеда, v_4 — скорость центра масс передней части (точка M_4), $T_2^{\text{вр}}$ — кинетическая энергия вращательного движения передней части. Координаты точки M_4 в системе $M_0\xi_2\eta_2\zeta_2$ равны $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = -d_1$, $\zeta_2 = d$ (рис. 6.5). Используя формулы (6.66), получим

$$x_4 = x_0 - d\sin\psi\cos\chi\cos\theta + d\cos\psi(\sin\chi\cos\theta\sin\lambda - \sin\theta\cos\lambda) +$$
$$+ d_1\sin\lambda\sin\theta + d_1\cos\lambda\sin\chi\cos\theta,$$
$$y_4 = y_0 + d\cos\psi(\cos\lambda\cos\theta + \sin\lambda\sin\chi\sin\theta) - d\sin\psi\cos\chi\sin\theta -$$
$$-d_1\sin\lambda\cos\theta + d_1\cos\lambda\sin\chi\sin\theta,$$
$$z_4 = z_0 + d_1\cos\lambda\cos\chi + d\sin\psi\sin\chi + d\cos\psi\sin\lambda\cos\chi.$$

После дифференцирования и сохранения членов не выше второго порядка малости получим

$$\dot{x}_4 = \dot{x} + h_2\dot{\chi} + l_2\dot{\theta} - \dot{\psi}d,$$
$$\dot{y}_4 = v + (h_2\chi - l_2\theta - \psi d)\dot{\theta} + h_2\theta\dot{\chi} - d(\theta + \psi\cos\lambda)\dot{\psi},$$
$$\dot{z}_4 = -h_2\chi\dot{\chi} + d(\chi - \psi\sin\lambda)\dot{\psi} + \dot{\chi}\psi d,$$

где

$$h_2 = R - a\sin\varphi + d\sin\lambda + d_1\cos\lambda,$$
$$l_2 = a\cos\varphi + d\cos\lambda - d_1\sin\lambda.$$

Смысл величин h_2 и l_2 виден из рис. 6.5. (При вертикальном положении велосипеда h_2 есть расстояние от дороги до центра масс M_4 передней части велосипеда, l_2 — расстояние по горизонтали от центра заднего колеса M_1 до перпендикуляра, опущенного из точки M_4 на дорогу.) Кроме того, из рассмотрения этого же рисунка видно, что между параметрами велосипеда существует зависимость

$$d = h_2\sin\lambda - c_1 - (c - l_2)\cos\lambda.$$

При сделанных предположениях о малости переменных имеем

$$\frac{1}{2} m_2 v_4^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} + h_2\dot{\chi} - l_2\dot{\theta} - \dot{\psi} d)^2 +$$
$$+ m_2 v (h_2\chi - l_2\theta - \psi d)\,\dot{\theta} + m_2 v h_2 \theta\dot{\chi} - m_2 v d(\theta + \psi\cos\lambda)\,\dot{\psi}.$$

Мгновенная угловая скорость передней части велосипеда без учета собственного вращения переднего колеса складывается из угловой скорости вращения вместе с рамой и угловой скорости вращения вокруг рулевой оси. Пусть оси y_2 и z_2 лежат в плоскости переднего колеса, причем ось y_2 горизонтальна. Отметим, что угловая скорость вращения вокруг рулевой оси $\dot{\psi}$ перпендикулярна к оси x_2. Очевидно, что во введенной системе координат, имеющей начало в точке M_4, ось x_2 параллельна оси ξ_2, а ось y_2 повернута по отношению к оси η_2 на угол λ. Следовательно, проекции абсолютной мгновенной угловой скорости передней части велосипеда на оси системы $M_4x_2y_2z_2$ равны

$$\begin{aligned} \omega_{x_2} &= \omega_{\xi_2}, \\ \omega_{y_2} &= \omega_{\eta_2}\sin\lambda + \omega_{\zeta_2}\cos\lambda, \\ \omega_{z_2} &= -\omega_{\eta_2}\cos\lambda + \omega_{\zeta_2}\sin\lambda. \end{aligned} \tag{6.75}$$

Проекции мгновенной скорости задней части велосипеда (без учета вращения заднего колеса) на оси системы $M_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ равны (рис. 6.7)

$$\begin{aligned} \omega_{\xi_1} &= -\dot{\theta}\sin\chi, \\ \omega_{\eta_1} &= -\dot{\theta}\cos\chi\sin\varphi + \dot{\chi}\cos\varphi, \\ \omega_{\zeta_1} &= \dot{\theta}\cos\chi\cos\varphi + \dot{\chi}\sin\varphi. \end{aligned}$$

Переходя теперь к нахождению проекций мгновенной угловой скорости передней части велосипеда (без учета вращения переднего колеса) на оси системы $M_0\xi_2\eta_2\zeta_2$, воспользуемся формулами (6.65) и учтем угловую скорость $\dot{\psi}$ (рис. 6.8). Тогда

$$\omega_{\xi_2} = -\dot{\theta}\sin\chi\cos\psi + (-\dot{\theta}\cos\chi\sin\varphi + \dot{\chi}\cos\varphi)\sin\psi\cos\chi +$$
$$+ (\dot{\theta}\cos\chi\cos\varphi + \dot{\chi}\sin\varphi)\sin\psi\sin\sigma.$$

Линеаризуя это выражение, получим

$$\omega_{\xi_2} = \dot{\chi}\psi\cos\lambda - (\chi - \psi\sin\lambda)\,\dot{\theta}.$$

Аналогично найдем

$$\begin{aligned} \omega_{\eta_2} &= -\dot{\psi} - \dot{\theta}\cos\lambda + \dot{\chi}\sin\lambda, \\ \omega_{\zeta_2} &= \dot{\theta}\sin\lambda + \dot{\chi}\cos\lambda. \end{aligned}$$

Используя теперь формулы (6.75), окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_{x_2} &= \dot{x}\,\psi\cos\lambda - (\chi - \psi\sin\lambda)\,\dot{\theta} \\ \omega_{y_2} &= \dot{\chi} - \dot{\psi}\sin\lambda, \\ \omega_{z_2} &= \dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\lambda. \end{aligned}$$

Для переднего колеса

$$\omega'_{x_2} = -\frac{v}{R} + \omega_{x_2}, \quad \omega'_{y_2} = \omega_{y_2}, \quad \omega'_{z_2} = \omega_{z_2}.$$

Обозначим I_{y_2} и I_{z_2} — моменты инерции передней части велосипеда относительно осей y_2 и z_2, $I_{y_2 z_2}$ — центробежный момент инерции, I_2 — момент инерции переднего колеса относительно собственной оси вращения. Тогда

$$T_2^{\text{вр}} = \frac{1}{2}\left[I_{y_2}(\dot\chi - \dot\psi\sin\lambda)^2 - 2I_{y_2z_2}(\dot\chi - \dot\psi\sin\lambda)(\dot\theta + \dot\psi\cos\lambda) + \right.$$
$$\left. + I_{z_2}(\dot\theta + \dot\psi\cos\lambda)^2\right] - I_2\frac{v}{R}\dot\chi\psi\cos\lambda + I_2\frac{v}{R}\dot\theta(\chi - \psi\sin\lambda).$$

Итак, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}m_1[(\dot x - l_1\dot\theta + h_1\dot\chi)^2 + 2v(l_1\theta - h_1\chi)\dot\theta + 2vh_1\theta\dot\chi] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(I_{y_1}\dot\chi^2 - 2I_{y_1z_1}\dot\chi\dot\theta + I_{z_1}\dot\theta^2\right) + I_1\frac{v}{R}\dot\theta\chi + \frac{1}{2}m_2(\dot x + h_2\dot\chi - l_2\dot\theta - \dot\psi d)^2 +$$
$$+ m_2v(h_2\chi - l_2\theta - \psi d)\dot\theta + m_2vh_2\theta\dot\chi - m_2vd(\theta + \psi\cos\lambda)\dot\psi +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[I_{y_2}(\dot\chi - \dot\psi\sin\lambda)^2 - 2I_{y_2z_2}(\dot\chi - \dot\psi\sin\lambda)(\dot\theta + \dot\psi\cos\lambda) + \right.$$
$$\left. + I_{z_2}(\dot\theta + \dot\psi\cos\lambda)^2\right] - I_2\frac{v}{R}\dot\chi\psi\cos\lambda + I_2\frac{v}{R}\dot\theta(\chi - \psi\sin\lambda). \quad (6.76)$$

Потенциальная энергия велосипеда

$$\Pi = m_1gz_3 + m_2gz_4 = m_1gh_1\cos\chi + m_2g\,[(R - a\cos\varphi)\cos\chi +$$
$$+ d_1\cos\lambda\cos\chi + d\sin\psi\sin\chi + d\cos\psi\sin\lambda\cos\chi] \approx$$
$$\approx -\frac{1}{2}g\left[(m_1h_1 + m_2h_2)\chi^2 + d\sin\lambda m_2\psi^2 - 2m_2\psi\chi d\right].$$

Предположим, что рассеивание энергии происходит только из-за вязкого трения в рулевой колонке, и следовательно, обобщенная сила, соответствующая этому трению,

$$Q_\psi^{\text{тр}} = -n\dot\psi.$$

Найдем обобщенные силы

$$Q_\psi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} - n\dot\psi = m_2gd\sin\lambda\cdot\psi - m_2g\chi d - n\dot\psi,$$
$$Q_\chi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\chi} = (m_1h_1 + m_2h_2)g\chi - m_2g\psi d, \quad (6.77)$$
$$Q_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} = 0, \quad Q_\theta = -\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} = 0.$$

Для рассматриваемого случая уравнения (6.60) принимают вид

$$T_\psi - Q_\psi + (T_x - Q_x)h_{41} + (T_\theta - Q_\theta)h_{51} = 0,$$
$$T_\chi - Q_\chi + (T_x - Q_x)h_{42} + (T_\theta - Q_\theta)h_{52} = 0.$$

На основании уравнений неголономных связей (6.74)

$$\delta x = 0, \qquad \delta\theta = \frac{c_1}{c}\,\delta\psi,$$

и уравнениями движения являются

$$c(T_\psi - Q_\psi) + c_1 T_\theta = 0, \quad T_\chi - Q_\chi = 0. \tag{6.78}$$

Вычислим операторы T_ψ и T_χ, T_θ:

$$T_\psi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\psi} = -m_2 d\ddot x + I_4\ddot\theta - I_3\ddot\chi + I\ddot\psi + {} \\ + I_2\frac{v}{R}\cos\lambda\,\dot\chi + I_2\frac{v}{R}\sin\lambda\,\dot\theta,$$

$$T_\chi = h\ddot x - I_{12}\ddot\theta - \frac{v}{R}(I_1 + I_2)\,\dot\theta + I_{11}\ddot\chi - I_2\frac{v}{R}\cos\lambda\,\dot\psi - I_3\ddot\psi, \tag{6.79}$$

$$T_\theta = -l\ddot x + I_{22}\ddot\theta - I_{12}\ddot\chi + I_4\ddot\psi + \frac{v}{R}(I_1 + I_2)\,\dot\chi - I_2\frac{v}{R}\sin\lambda\,\dot\psi,$$

где

$$\begin{aligned} &l = m_1 l_1 + m_2 l_2, \quad h = m_1 h_1 + m_2 h_2, \\ &I_{11} = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_{y_1} + I_{y_2}, \quad I_{22} = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + I_{z_1} + I_{z_2}, \\ &I_{12} = m_1 h_1 l_1 + I_{y_1 z_1} + m_2 h_2 l_2 + I_{y_2 z_2}, \\ &I_3 = m_2 h_2 d + I_{y_1}\sin\lambda + I_{y_2 z_2}\cos\lambda, \\ &I_4 = m_2 l_2 d + I_{y_2 z_2}\sin\lambda + I_{z_2}\cos\lambda, \\ &I = m_2 d^2 + I_{y'}\sin^2\lambda + I_{y_2 z_2}\sin 2\lambda + I_{z_2}\cos^2\lambda. \end{aligned} \tag{6.80}$$

Используя выражения (6.77) и (6.79), составим теперь уравнения (6.78) движения велосипеда:

$$-(m_2 cd + c_1 l)\ddot x + (cI_4 + c_1 I_{22})\,\ddot\theta - (cI_3 + c_1 I_{12})\,\ddot\chi + {} \\ + (cI + c_1 I_4)\,\ddot\psi + \frac{v}{R}\left[cI_2\cos\lambda + c_1(I_1 + I_2)\right]\dot\chi + cI_2\frac{v}{R}\sin\lambda\,\dot\theta - {} \\ - c_1 I_2\frac{v}{R}\sin\lambda\,\dot\psi - cm_2 gd\sin\lambda\,\psi + cm_2 gd\chi + cn\dot\psi = 0,$$

$$h\ddot x - I_{12}\ddot\theta - \frac{v}{R}(I_1 + I_2)\,\dot\theta + I_{11}\ddot\chi - I_3\ddot\psi - I_2\frac{v}{R}\cos\lambda\,\dot\psi - hg\chi + m_2 g\,d\psi = 0.$$

К этим уравнениям следует присоединить уравнения неголономных связей (6.74):

$$\dot x + v\theta = 0, \quad c\dot\theta = c_1\dot\psi + v\psi\cos\lambda.$$

После исключения x и θ при помощи уравнений неголономных связей получим

$$\begin{aligned} &a_0\ddot\chi - a_1\chi - a_2\ddot\psi - va_3\dot\psi + (a_4 - v^2 a_5)\,\psi = 0, \\ &b_0\ddot\psi + vb_1\dot\psi + (b_2 v^2 - b_3)\,\psi - b_4\ddot\chi + vb_5\dot\chi + b_6\chi = 0, \end{aligned} \tag{6.81}$$

где

$$a_0 = cI_{11}, \quad a_1 = chg, \quad a_2 = c_1 I_{12} + cI_3,$$

$$a_3 = c_1\left(h + \frac{I_1}{R} + \frac{I_2}{R}\right) + \left(I_{12} + c\frac{I_2}{R}\right)\cos\lambda,$$

$$a_4 = cm_2 gd, \quad a_5 = \left(h + \frac{I_1}{R} + \frac{I_2}{R}\right)\cos\lambda,$$

$$b_0 = cI + 2c_1 I_4 + \frac{c_1^2}{c} I_{22},$$

$$b_1 = I_4\cos\lambda + c\delta_1 + c_1\left(m_2 d + \frac{I_{22}}{c}\cos\lambda\right) + \frac{c_1^2 l}{c},$$

$$b_2 = \left(m_2 d + \frac{I_2}{R}\sin\lambda + \frac{c_1 l}{c}\right)\cos\lambda, \quad b_3 = cm_2 gd\sin\lambda,$$

$$b_4 = cI_3 + c_1 I_4, \quad b_5 = c\frac{I_2}{R}\cos\lambda + \frac{c_1}{R}(I_1 + I_2), \quad b_6 = cm_2 gd,$$

$$\delta_1 = \frac{n}{v}.$$

Система уравнений (6.81) представляет собой линеаризованные уравнения движения неуправляемого велосипеда с жесткими колесами.

Рассмотрим простейшую модель велосипеда. которая получается при условии, что ось руля вертикальна, проходит через центр переднего колеса и является главной осью инерции передней части велосипеда.

В этом случае

$$c_1 = d = \lambda = I_{y_2 z_2} = 0.$$

Следовательно, в соответствии с формулами (6.80)

$$I_3 = 0, \quad I_4 = I_{z_2}, \quad I = I_{z_2},$$

$$I_{12} = m_1 h_1 l_1 + I_{y_1 z_1} + m_2 h_2 l_2.$$

Уравнения (6.81) при этом примут вид

$$cI_1\ddot{\chi} - chg\chi - v\left(I_{12} + c\frac{I_2}{R}\right)\dot{\psi} - v^2\left(h + \frac{I_1}{R} + \frac{I_2}{R}\right)\psi = 0,$$

$$cI_{z'}\ddot{\psi} + (I_{z'} + c\delta_1)v\dot{\psi} + c\frac{I_2}{R}v\dot{\chi} = 0.$$

Пусть l_0 и h_0 — координаты центра масс всего велосипеда. Положим, что $I_1 = mh_0^2$, $I_{12} = mh_0 l_0$, $h = mh_0$, $m = m_1 + m_2$, и пренебрежем моментами инерции I_1 и I_2 колес по сравнению с величиной $mh_0 R$, тогда первое уравнение

$$\ddot{\chi} = \frac{l_0 v}{h_0 c}\dot{\psi} + \frac{g}{h_0}\left(\chi + \frac{v^2}{cg}\psi\right)$$

описывает движение велосипеда и соответствует элементарной теории велосипеда [29]. Из этого уравнения вытекает, что если велосипед начинает падать вправо, то для остановки падения нужно создать $\ddot{\chi} < 0$, а для этого

нужно, чтобы $\dot{\psi} < 0$, т. е. руль следует повернуть в сторону падения. Так как $\dot{\psi} < 0$, то это приведет к возникновению $\psi < 0$, что увеличит абсолютное значение $\ddot{\chi}$.

Исследование устойчивости велосипеда в более общем случае изложено в работах [37, 21].

§ 6.6. Перестановочные соотношения в аналитической механике неголономных систем

До сих пор (см. § 3.7 и 6.3) мы встречались с перестановочными соотношениями двух видов:

$$d\delta q_k - \delta dq_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{6.82}$$

и

$$d\delta\pi_j - \delta\, d\pi_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}\, d\pi_k\, \delta\pi_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}\, dt\, \delta\pi_i \tag{6.83}$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Существуют и другие формы перестановочных соотношений. Так, например, если положение системы материальных точек определяют n обобщенных координат $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$, производные которых связаны m соотношениями

$$\dot{q}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n-m} a_{\nu\mu}(q)\,\dot{q}_\mu \qquad (\nu = n - m + 1,\ \ldots,\ n), \tag{6.84}$$

то в качестве перестановочных соотношений иногда принимают (6.82) лишь для первых $n - m$ обобщенных координат $q_1,\ q_2,\ \ldots$ $\ldots,\ q_{n-m}$, а для остальных координат

$$d\,\delta q_\nu - \delta\, dq_\nu = \sum_{\mu=1}^{n-m}\sum_{\sigma=1}^{n-m} \beta_{\mu\sigma}^{\nu}\, dq_\mu\, \delta q_\sigma$$
$$(\nu = n - m + 1,\ \ldots,\ n), \tag{6.85}$$

где

$$\beta_{\mu\sigma}^{\nu} = \frac{\partial a_{\nu\sigma}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial a_{\nu\sigma}}{\partial q_\nu}\, a_{\nu\mu} - \frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial q_\nu}\, a_{\nu\sigma}.$$

В случае голономной системы, когда неинтегрируемые уравнения кинематических связей отсутствуют, вариации обобщенных координат независимы и, следовательно, изображающая точка в пространстве конфигураций может смещаться в любом направлении и, в частности, по любому бесконечно малому *замкнутому* контуру, что и приводит к выражению (6.82).

В случае неголономной системы*) вариации обобщенных координат оказываются связанными соотношениями (6.84); это

*) Ради простоты в дальнейшем будут рассматриваться системы материальных точек со склерономными неголономными связями.

означает, что в каждой точке пространства конфигураций теперь находится бесконечно малая «пластинка» кинематически возможных движений, т. е. перемещений, совместимых с неголономными связями. Поэтому не каждый замкнутый контур в пространстве конфигураций неголономной системы оказывается кинематически допустимой траекторией движения изображающей точки. В связи с этим возникает возможность выбора тех или иных перестановочных соотношений. Из каких же соображений следует исходить при осуществлении этого выбора?

Здесь могут быть по меньшей мере два подхода [35—37]: первый подход игнорирует соотношения (6.84) при смещении изображающей точки с траектории действительного движения, т. е. изображающая точка оказывается в условиях, которые существуют в пространстве конфигураций голономной системы, когда выполняются перестановочные соотношения (6.82). Однако при этом для описания движения системы приходится привлекать квазикоординаты (см. § 3.7), для которых перестановочные соотношения записываются в виде (6.83). Если квазикоординаты ввести при помощи соотношений (3.100) так, что правая часть последних m соотношений

$$\dot{\pi}_\nu = \dot{q}_\nu - \sum_{\mu=1}^{n-m} a_{\nu\mu}(q)\,\dot{q}_\mu \quad (\nu = n - m + 1, \ldots, n) \tag{6.86}$$

обращается в нуль в силу уравнений неголономных связей, то согласно процедуре, описанной в § 6.3, уравнения движения неголономной системы записываются в виде уравнений в квазикоординатах.

При втором подходе допускаются только такие бесконечно малые смещения, при которых удовлетворяются уравнения (6.84) неголономных связей. В этом случае мы приходим к перестановочным соотношениям (6.85) и к уравнениям Воронца [14, 15], которые для систем Чаплыгина совпадают с уравнениями Чаплыгина (§ 6.5).

Из сказанного следует, что перестановочные соотношения играют важную роль при выводе уравнений движения неголономной системы и, следовательно, перестановочные соотношения должны присутствовать уже в общем уравнении динамики. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно провести простые выкладки. В самом деле, запишем общее уравнение динамики (3.13) в обобщенных координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0, \tag{6.87}$$

где L — функция Лагранжа, Q_i — обобщенные непотенциальные

силы, и воспользуемся тождественными преобразованиями

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q,$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right).$$

После подстановки этих выражений в (6.87) общее уравнение динамики записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left[Q_i\,\delta q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{dt}\delta q_i - \delta \dot{q}_i\right)\right] + \delta L = 0. \quad (6.88)$$

Отсюда видно, что окончательная форма уравнений движения зависит от значений разности $d\delta q_i/dt - \delta\dot{q}_i$, т. е. от того, какие перестановочные соотношения будут приняты во внимание.

Для голономных систем эти разности обращаются в нуль. Для неголономных систем, как сказано выше, имеется некоторый произвол.

С историей возникновения вопроса о перестановочных соотношениях и его решением читатель может познакомиться в книге [37].

§ 6.7. Вариационные принципы в аналитической механике неголономных систем

Как мы знаем (§ 5.2), принцип стационарного действия Гамильтона — Остроградского для механических систем с потенциальными силами записывается в виде

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0, \quad (6.89)$$

где L — функция Лагранжа рассматриваемой системы, δ — оператор изохронного варьирования.

С формальной точки зрения, принцип стационарного действия в форме (6.89) совпадает с задачей вариационного исчисления. Однако, имея внешнее сходство, они различаются по существу: в механике под символом δ понимают виртуальную вариацию, т. е. не произвольное бесконечно малое изменение, а смещение, совместимое со связями, наложенными на систему. Отсюда следует, что лишь для голономной системы виртуальные вариации являются произвольными, и принцип стационарного действия (6.89) полностью совпадает с соответствующей задачей вариационного исчисления.

Существенное различие возникает для систем с неголономными связями, когда вариации обобщенных координат связаны соотношениями

$$\delta q_\nu = \sum_{\mu=1}^{n-m} a_{\nu\mu}(q)\,\delta q_\mu \qquad (\nu = n-m+1, \ldots, n), \qquad (6.90)$$

вытекающими из уравнений неголономных связей (6.84). Для неголономной системы соседняя кривая в пространстве конфигураций, образованная из траектории действительного движения путем варьирования, не будет, вообще говоря, являться кинематически возможной траекторией. Отсюда и из § 6.6 непосредственно следует, что вопрос о форме записи принципа стационарного действия в применении к неголономным системам тесно связан с вопросом о перестановочных соотношениях.

В самом деле, проинтегрируем уравнение Даламбера — Лагранжа, записанное в форме (6.88), в пределах между начальным и конечным положениями системы, которые она занимала в моменты времени t_1 и t_2 соответственно. В результате для системы с потенциальными силами получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta L + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left(\frac{d}{dt}\,\delta q_i - \delta \dot q_i\right)\right]dt = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\,\delta q_i\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}.$$

Согласно принципу стационарного действия вариации обобщенных координат на концах интервала интегрирования обращаются в нуль, и мы приходим к выражению

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta L + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left(\frac{d}{dt}\,\delta q_i - \delta \dot q_i\right)\right]dt = 0. \qquad (6.91)$$

Это выражение можно рассматривать как наиболее общую математическую формулировку принципа стационарного действия для систем с потенциальными силами, пригодную и для голономных, и для неголономных систем.

Для голономных систем $d\delta q_i/dt - \delta\dot q_i = 0$ и, следовательно, выражение (6.91) совпадает с (6.89). Таким образом, выражение (6.89) оказывается частным случаем формулировки (6.91), полученным в предположении о переместимости операций d и δ для всех истинных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

В случае неголономной системы частная форма записи принципа стационарного действия, которая может быть получена из (6.91), зависит от того, какие перестановочные соотношения будут использованы.

Покажем теперь, что форма перестановочных соотношений зависит в конечном итоге от выбора локальной системы координат в окрестности кривой действительного движения.

В самом деле, приводя уравнение Даламбера — Лагранжа к виду (6.88) и, соответственно, принцип стационарного действия — к виду (6.91), мы вводим операцию $\delta\dot{q}_i$, смысл которой, по существу, пока не определен.

Что такое $\delta\dot{q}_i$? Величина $\dot{q}_i$ определена только на кривой движения, а операция δ представляет варьирование в направлении, вообще говоря, отличном от направления действительного перемещения. Операция δ определена во всех точках пространства конфигураций, в то время как операция d определена только для точек траектории действительного движения изображающей точки в пространстве конфигураций.

Из этого следует, что в точках произвольной (действительной или кинематически возможной) траектории движения операция $d\delta$ определена, а операция δd не определена. Это утверждение поясняется геометрически на рис. 6.11, из которого видно, что

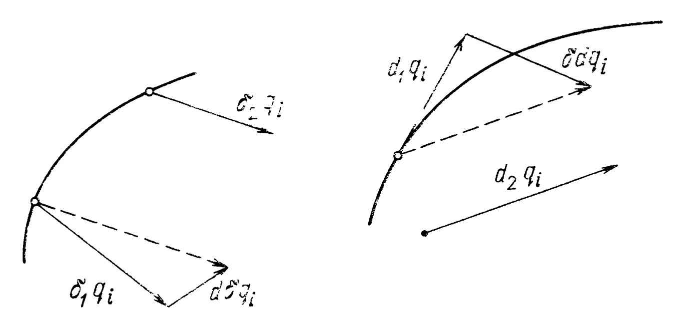


Рис. 6.11

операция $d\delta q_i$ имеет однозначный смысл, поскольку вполне определены все три операции d, δ_1 и δ_2. Во втором случае на этом рисунке из трех операций d_1, δ и d_2 определены лишь две первые, а операция d_2 лишена смысла, поскольку соответствующий ей вектор находится вне кривой движения. Следовательно, вместе с ней не определена и операция $\delta dq_i = d_2q_i - d_1q_i$. Таким образом, нужно доопределить операцию d так, чтобы операция δd приобрела смысл.

Это можно сделать путем введения локальной системы координат в окрестности траектории действительного движения (прямого пути) [35]. В частности, можно выбрать эту систему координат так, что операции d и δ окажутся перестановочными для всех истинных координат. В таком случае и для неголономных систем принцип стационарного действия запишется в форме (6.89). Однако при этом условия неголономных связей уже не будут выполняться в окрестности кривой действительного движения, и следовательно, при выполнении операции δL условиями (6.90) пользоваться нельзя. В этом случае целесообразно ввести квазикоординаты так, чтобы последние m квазикоординат π_{n-m+1},

$\pi_{n-m+2}, \ldots, \pi_n$ были связаны с истинными координатами $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_n$ при помощи соотношений (6.86), а первые $n-m$ квазикоординат — произвольными линейными соотношениями (в частности, они могут быть и истинными координатами). Тогда, считая, что функция Лагранжа L зависит от $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $\dot\pi_1, \dot\pi_2, \ldots$ $\ldots, \dot\pi_n$, имеем

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\delta\dot\pi_i + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_\nu}b_{\nu i}\,\delta\pi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\delta\dot\pi_i + \frac{\partial L}{\partial \pi_i}\delta\pi_i\right), \qquad (6.92)$$

где $b_{\nu i}$ — коэффициенты в соотношениях между $\dot q_i$ и $\dot\pi_i$, т. е. в соотношениях (6.25) при $b_i \equiv 0$.

Преобразуем первую сумму в (6.92):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\delta\dot\pi_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\delta\dot\pi_i - \frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\frac{d}{dt}\delta\pi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\frac{d}{dt}\delta\pi_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\delta\pi_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\right)\delta\pi_i\right] - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_j}\left(\frac{d}{dt}\delta\pi_j - \delta\dot\pi_j\right).$$

Используя перестановочные соотношения (6.83) для квазикоординат $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, можно записать эту сумму в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\delta\dot\pi_i = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\delta\pi_i\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i} + \sum_{j,k=1}^{n}\gamma_{ijk}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_j}\dot\pi_k\right)\delta\pi_i\right],$$

потому что для склерономных неголономных связей все $\gamma_{ij} \equiv 0$. Подставляя найденное выражение в (6.92), находим

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\delta\pi_i\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i} - \frac{\partial L}{\partial \pi_i} + \sum_{j,k=1}^{n}\gamma_{ijk}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_j}\dot\pi_k\right)\delta\pi_i\right].$$

После этого выражение (6.89) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i} - \frac{\partial L}{\partial \pi_i} + \sum_{j,k=1}^{n}\gamma_{ijk}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_j}\dot\pi_k\right)\delta\pi_i\,dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot\pi_i}\delta\pi_i\Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Поскольку на концах интервала интегрирования $(\delta\pi_i)_1 = 0$, $(\delta\pi_i)_2 = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, последняя сумма пропадает, а в подынтегральной функции последние m членов выпадают в силу (6.86) и условий неголономных связей (6.90).

Тогда принцип стационарного действия записывается в виде интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\pi}_i}-\frac{\partial L}{\partial\pi_i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-m}\gamma_{ijk}\frac{\partial L}{\partial\dot{\pi}_j}\dot{\pi}_k\right)\delta\pi_i\,dt=0. \qquad (6.93)$$

В силу независимости вариаций $\delta\pi_1, \delta\pi_2, \ldots, \delta\pi_{n-m}$ оставшаяся сумма распадается на $n-m$ уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\pi}_i}-\frac{\partial L}{\partial\pi_i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-m}\gamma_{ijk}\frac{\partial L}{\partial\dot{\pi}_j}\dot{\pi}_k=0,$$

т. е. уравнений Больцмана — Гамеля для системы с потенциальными силами. Эти уравнения представляют частный случай уравнений в квазикоординатах (3.108).

Если выбрать локальную систему координат иначе, то принцип стационарного действия в форме (6.89) для неголономных систем оказывается неприменимым. Рассмотрим случай, когда локальная система координат построена так, что операции d и δ переместимы лишь для первых $n-m$ обобщенных координат. Тогда для остальных координат получим перестановочные соотношения (6.85). Подставляя их в (6.91), приходим к следующей математической формулировке принципа стационарного действия в рассматриваемом случае:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta L^0+\sum_{\mu,i=1}^{n-m}\sum_{\nu=n-m+1}^{n}\beta_{\mu i}^{\nu}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\dot{q}_\mu\,\delta q_i\right)dt=0, \qquad (6.94)$$

где L^0 является функцией $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{n-m}$, полученной из функции Лагранжа L при помощи уравнений неголономных связей (6.84).

Использование в данном случае уравнений (6.84) вполне законно, так как при выбранной системе локальных координат величины $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ и $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ являются перемещениями, совместимыми с неголономными связями не только на кривой действительного движения, но и в ее окрестности.

Покажем, что принцип стационарного действия в форме (6.94) приводит к *уравнениям Воронца* [14], которые для систем Чаплыгина совпадают с уравнениями Чаплыгина (см. § 6.5). В самом деле, преобразуем в (6.94) выражение δL^0:

$$\delta L^0=\sum_{i=1}^{n-m}\left[\left(\frac{\partial L^0}{\partial q_i}+\sum_{\nu=n-m+1}^{n}\frac{\partial L^0}{\partial q_\nu}a_{\nu i}\right)\delta q_i+\frac{\partial L^0}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right].$$

Воспользуемся перестановочностью операций d и δ для первых

координат $q_1, q_2, \ldots, q_{n-m}$:

$$\delta L^0 = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^0}{\partial q_i} - \sum_{\nu=n-m+1}^{n}\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_\nu}a_{\nu i}\right)\delta q_i.$$

После подстановки найденного выражения δL^0 в (6.94) получаем

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n-m}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^0}{\partial q_i} - \sum_{\nu=n-m+1}^{n}\left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_\nu}a_{\nu i} - \sum_{\mu=1}^{n-m}\beta^{\nu}_{\mu i}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\dot{q}_\mu\right)\right]\delta q_i\,dt = 0.$$

Отсюда в силу независимости вариаций $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{n-m}$ и следуют уравнения Воронца

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^0}{\partial q_i} - \sum_{\nu=n-m+1}^{n}\left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_\nu}a_{\nu i} - \sum_{\mu=1}^{n-m}\beta^{\nu}_{\mu i}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\dot{q}_\mu\right). \qquad (6.95)$$

В случае, когда функция Лагранжа и коэффициенты в уравнениях неголономных связей (6.84) не зависят явно от обобщенных координат $q_{n-m+1}, q_{n-m+2}, \ldots, q_n$, уравнения (6.95) совпадают с уравнениями Чаплыгина [43].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А. Классическая механика.— М.: Наука, 1980.— 367 с.
2. Андронов А. А., Витт Л. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.— 915 с.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1, 2.— М.: Гостехиздат, 1960.
4. Аржаных И. С. Поле импульсов.— Ташкент: Наука, 1965.— 231 с.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.— 431 с.
6. Бобылёв Л. К. О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия // Приложение к XI тому Записок Российской Академии наук.— 1989.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— Изд. 4-е, испр. и доп. М.: Наука, 1974.— 503 с.
8. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний.— Л.: Судпромгиз, 1962.
9. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику.— М.: Наука, 1971.— 264 с.
10. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 1.— 4-е изд., испр.— М.: Наука, 1985.— 239 с.
11. Бутенин Н. В.. Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 2.— 3-е изд.— М.: Наука, 1985.— 496 с.
12. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука. 1987.— 382 с.
13. Вариационные принципы механики. [Сборник статей].— М.: Физматгиз, 1959.
14. Воронец П. В. Об уравнениях движения для неголономных систем // Мат. сб.— 1901.— Т. 22, № 4.
15. Воронец П. В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости // Киевские университетские известия.— 1903.— Т. 43. № 1, 4.
16. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике.— Изд. 2-е, испр.— М.: Наука, 1966.— 300 с.
17. Гапонов А. В. Неголономные системы С. А. Чаплыгина и теории коллекторных электрических машин // Докл. АН СССР.— 1952.— Т. 87, № 3.— С. 401—404.
18. Гапонов А. В. Электромеханические системы со скользящими контактами и динамическая теория электрических машин // Памяти А. А. Андронова.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.— С. 196—214.
19. Голдстейн Г. Классическая механика: Пер. с англ.— 2-е изд.— М.: Наука, 1975.
20. Даламбер Ж. Динамика: Пер. с фр.— М.; Л.: Гостехиздат.— 1950.— 344 с.
21. Дикарев Е. Д., Дикарева С. Б., Фуфаев Н. А. Влияние наклона рулевой оси и выноса переднего колеса на устойчивость движения велосипеда // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела.— 1981.— № 1.— С. 69—73.
22. Добронравов В. В. Основы аналитической механики.— М.: Высш. школа, 1976.— 263 с.

23. Дубошин Г. Н. Небесная механика.— М.: Наука, 1964.— 560 с.
24. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 1.— 2-е изд.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.— 594 с.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. 1. Механика.— 4-е изд., испр. Т. 2. Теория поля.— 7-е изд., испр.— М.: Наука, 1988.
26. Ланцош К. Вариационные принципы механики: Пер. с англ.— М.: Мир, 1963.— 408 с.
27. Лахтин Л. Н. Свободное движение в поле земного сфероида.— М.: Физматгиз, 1963.
28. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики.— Т. 1.— Пер. с итал.— М.: ИЛ, 1951.
29. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика. Ч. 3.— Л.; М.: ГТТИ, 1934.
30. Лурье А. И. Аналитическая механика.— М.: Физматгиз, 1961.— 824 с.
31. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
32. Меркин Д. Р. Гироскопические системы.— Изд. 2-е, перераб. и доп.— М.: Наука, 1974.— 344 с.
33. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1987.— 304 с.
34. Мультон Ф. Р. Введение в небесную механику: Пер. с англ.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.— 480 с.
35. Неймарк Ю. И. О перестановочных соотношениях в механике // Тр. Горьк. иссл. физ-техн. ин-та и радиофизич. ф-та Горьковского ун-та. Сер. физ.— 1957.— Т. 35.— С. 100—104.
36. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А Перестановочные соотношения в аналитической механике неголономных систем // Прикл. мат. и мех.— 1960.— Т. 24, вып. 6.— С. 1013—1017.
37. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем.— М.: Наука, 1967.— 519 с.
38 Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1980.— 272 с.
39. Парс Л. А. Аналитическая динамика. Пер. с англ.— М.: Наука, 1971.— 635 с.
40. Суслов Г. К. Теоретическая механика.— 3-е изд.— М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
41. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика: Пер. с англ.— М.; Л.: ОНТИ, 1937.— 500 с.
42. Фуфаев Н. А. Теория движения систем с качением // Прикл. мат. и мех.— 1985.— Т. 49, № 1.— С. 56—65.
43. Чаплыгин С. А. Исследования по динамике неголономных систем.— М.: Гостехиздат, 1949.— 112 с.
44. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.— 535 с.
45. Якоби К. Г. Лекции по динамике: Пер. с нем.— Л.; М.: ОНТИ, 1936.— 272 с.
46. Boltzmann L. Ueber die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome generalisierte Koordinaten // Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftliche Akademie der Wissenschaften zu Wien.— 1902.— Bd 111, abt. 11 a, H. 1—2.— S. 1603—1614.
47. Hamel G. Die Lagrange — Eulersche Gleichungen der Mechanik // Zeitschrift für Mathematik und Physik.— 1904.— Bd 50.— S. 1—50.
48. Hamel G. Theoretische Mechanik.— Berlin, 1949.— S. 310.
49. Hölder O. Ueber die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis // Göttingen Nachrichten, 1896.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

2 руб.